Inteligencia MATEMÁTICA

Descubre al matemático que llevas dentro

EDUARDO SÁENZ DE CABEZÓN

Plataforma Actual

«La matemática pura es, de alguna forma, la poesía del pensamiento lógico.»
ALBERT EINSTEIN

Inteligencia matemática

Índice

Si estás leyendo esto seguramente ya es demasiado tarde para avisarte, pero quizá estamos aún a tiempo: déjalo. Déjalo, de verdad, no empieces siquiera, no sigas leyendo, cierra el libro y déjalo apartado. Guárdalo para siempre o dáselo a alguien. O mejor aún, tíralo lejos de ti, donde no puedas volver a abrirlo. Si conoces algún búnker nuclear sellado, mételo ahí.

En serio, éste es un libro sobre matemáticas. ¿Quién leería un libro sobre matemáticas sin que le obliguen? No seas tú, aún puedes evitarlo. No digas que no te lo he advertido, es posible que si sigues leyendo encuentres cosas que no te van a gustar. O peor aún, es posible que encuentres cosas que *sí* te van a gustar. Cosas *sobre las matemáticas*. Y eso no puede ser, es raro. Venga ya. No sigas.

Veo que no me haces caso. Seguramente piensas que estoy de broma, o que exagero. Allá tú, yo ya no puedo hacer más. Si has decidido leer, no puedo impedírtelo. Al menos déjame pedirte que leas este libro con cuidado. Ten cuidado porque si finalmente decides seguir adelante, es posible que haya cambios en tus ideas sobre las matemáticas, esas ideas con las que llevas viviendo tan cómodamente todo

este tiempo. Es posible que si sigues leyendo, este maldito libro te induzca a pensar que las matemáticas no son tan odiosas, que en ellas intervienen la creatividad y el juego de formas que no sospechabas. Que en ellas es tan importante la intuición como el cálculo, la imaginación como la técnica, y que incluso te abren oportunidades de disfrutar de la realidad de una forma distinta. Es posible.

En este libro vas a encontrarte con grandes matemáticos. Vas a enfrentarte a las trampas y a las satisfacciones del pensamiento lógico. Vas a ver acertijos, y juegos. Vas a ver problemas aparentemente inocentes que la humanidad aún no ha podido resolver. Hay alguna historia triste, otras maravillosas. Quizá haya alguna oportunidad para la risa. Te encontrarás en algún momento razonando, experimentando o incluso sorprendiéndote. Trataré de hacerte ver que conviene tener algo de matemático en esta vida, y que aunque mucha gente tiene una historia de frustración con las matemáticas, es posible reconciliarse con ellas sin traumas ni sufrimientos. Quizá hagamos algunas cuentas y algunos diagramas, no pasa nada, ¿verdad?

Seguramente la mejor forma de describir lo que tienes delante es diciendo que es un paisaje muy variado, mucho. Algunos de sus aspectos estimularán más a algunas personas que a otras, hay quien disfrutará de partes que dejarán indiferentes al resto. Alguna gente no entenderá que otros gocen con algunos de los capítulos de este libro. Pero así son

las matemáticas, y así son las muchas formas de pensar en matemáticas.

Este libro tiene dos partes. En la primera trato de describirte de alguna manera cómo pensamos la gente que nos dedicamos a las matemáticas, cuáles son los fundamentos del pensamiento matemático. No es una exposición exhaustiva, ni analizo los mecanismos cerebrales involucrados, ni entro en grandes profundidades. Es una exposición simple que quiere permitirte tener una idea de qué es lo que tiene en su cabecita la gente que se dedica a las matemáticas. Por cierto, que eso tú también lo tienes, lo ejercites o no. La primera parte es la más difícil, ten paciencia contigo mismo. No sé si eres chico o chica, da igual, en esto de las matemáticas no está claro que haya una diferencia entre la forma de pensar de las mujeres y la de los hombres. Tampoco sé si preferirás imaginarte dentro de ti a un «matemático interior» o a una «matemática interior» para ayudarte a razonar, da lo mismo. Lo importante es que, ya que has decidido empezar, aproveches al máximo el tiempo que vamos a pasar juntos. Este libro no se lee de forma distraída y de un tirón. Hay pasajes por los que pasarás rápidamente y otros en los que te detendrás un tiempo si quieres comprenderlo todo. No pasa nada, esto no es una carrera, es un paseo, y cuando quieras darte la vuelta, la das y ya está.

La segunda parte del libro trata de ayudarte a mantener activo a tu matemático o matemática interior, a que os llevéis bien y tengáis una relación fluida que sea beneficiosa para ambos. Tienes un matemático interior, lo quieras o no. Yo me

lo imagino como una especie de Yoda pequeñito dentro de mí, que habla raro y razona de forma lógica. Tal vez el tuyo se asustó en la escuela y permanece oculto en un rincón, o anda disfrazado de otras cosas, o percibe en ti un rechazo que no se atreve a romper. Yo qué sé, quizá se siente culpable por no ser capaz de mostrarte lo mejor de sí mismo y que lo aprecies. La segunda parte del libro está pensada para que hagáis cosas juntos, para que él te enseñe lo que sabe, para que se sienta útil y tú lo percibas así. Para que hagáis algún viaje juntos y aprendas cómo cuidarle. Para que vuestra relación, vaya a ser ésta más o menos intensa, sea al menos natural y cordial. Que ambos os sintáis a gusto el uno con el otro.

He colocado a lo largo del libro problemas y cuestiones matemáticas con la benévola intención de que te desanimen a seguir. También puede ser que, por desgracia, en lugar de desanimarte te sirvan de acicate, de motivación, que te resulten interesantes o incluso divertidos. Si es así, no es culpa mía, no era mi intención, y si te diviertes es por tu culpa, yo declino toda responsabilidad en eso. El propósito de todas esas cuestiones y problemas es que de algún modo experimentes en tu propia carne las formas de razonar de los matemáticos. Es mejor entonces que tomes lápiz y papel, que garabatees soluciones, que escribas, dibujes y emborrones, que experimentes las pequeñas frustraciones y las íntimas satisfacciones que produce el razonamiento matemático, la resolución de problemas, el llegar a tus propias demostraciones. Ésa es la mejor forma de leer este libro, ya que te has decidido a leerlo: con un lápiz y un papel al lado. Eso sí, te

lo advierto, si te pones a ello tu cerebro va a trabajar, y eso cuesta un cierto esfuerzo. Pero de todas formas si no te salen los ejercicios o no resuelves los problemas, si no logras las demostraciones, no te preocupes. Cuando ya no te divierta o no te interese intentar solucionarlos, mira tranquilamente las pistas que te doy para ayudarte. O mira cuando quieras las soluciones, sin remordimientos ni sentimiento de incapacidad. Esas maldades las dejamos para los ejercicios de los libros de texto y los exámenes de matemáticas. En este libro no hay calificaciones, ni sobresalientes ni suspensos, ni listos ni tontos. Sólo es una propuesta para entender en qué consiste eso que llaman inteligencia matemática.

Prepárate o abandona. Empezamos.

PRIMERA PARTE
Inteligencia matemática

1.
Las matemáticas son de listos

Las matemáticas son de listos, eso lo sabe todo el mundo. Es más, cuando se piensa en un test de inteligencia, de esos para medir el coeficiente intelectual de las personas, lo que se mide principalmente es la capacidad de razonamiento lógico-matemático: series de números o series de figuras en las que hay que decir cuál es el siguiente elemento, problemitas de lógica, incluso cálculo mental. Eso ha sido así «de toda la vida». Cuando a una madre le dicen: «Señora, su hija tiene una capacidad de razonamiento lógico-matemático sobresaliente», la madre de la criatura se alegra en lo más hondo de su corazón, lo cuenta en el vecindario y se congratula con la familia. Normal, ¿se le dan bien las matemáticas? Eso significa que es lista. ¿Se le dan mal? Es tontita, pobre, pero seguro que encuentra algo que se le dé bien. La inteligencia se identifica con la inteligencia de las matemáticas o sus derivados: las ciencias y las ingenierías. ¿Cuántas veces hemos oído eso de que «el que vale vale y el que no a letras»? Si es que es así, el razonamiento lógico-matemático es lo que determi-

na la inteligencia, el coeficiente intelectual. O determinaba. Porque resulta que vino el aguafiestas de Howard Gardner a finales de los años 80 con la teoría esa de las inteligencias múltiples y se acabó la hegemonía del razonamiento lógico-matemático. Fatal.

Bueno, ya en serio, no: no está fatal. Hace mucho tiempo que está claro que la capacidad para el razonamiento lógico-matemático no es la única forma de inteligencia. La verdad es que no hacía falta esperar a la teoría de las inteligencias múltiples para descubrir que la única forma de inteligencia no es la inteligencia matemática. No sé muy bien cómo definir la inteligencia en general, o la inteligencia humana en particular. Me quedo tranquilo porque no soy el único que tiene dificultades para eso. Párate a pensar, ¿qué dirías que es inteligencia? Quizá lo más honesto es decir que con la palabra inteligencia nos referimos a varias habilidades diferentes, o que ciertas habilidades son muestra de inteligencia. La capacidad de aprender, la resolución de problemas, la comprensión, la creatividad, la empatía... todo eso forma parte de la inteligencia, y según sea lo que estamos aprendiendo, los problemas a los que nos enfrentamos o el tipo de conceptos que comprendemos y creamos, hablamos de tipos de inteligencia. O de distintas expresiones de algo abstracto y general que llamamos inteligencia. Quien es capaz de comunicarse bien con otros demuestra inteligencia, quien es capaz de comprender a los demás demuestra inteligencia, quien puede entender conceptos complejos demuestra inteligencia. Ya sea para jugar

un gran partido de fútbol, componer una canción emotiva, consolar a un amigo, formar un buen equipo de trabajo, analizar un problema de física de partículas o formular una buena teoría matemática... se necesita «eso». Eso que es una mezcla de habilidades de muy distinto tipo y que llamamos inteligencia.

La ventaja de situar la inteligencia matemática en el contexto de los otros tipos de inteligencia, ya sea dentro de la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner y sus seguidores o de los estudiosos que desde la Antigüedad han pensado sobre la inteligencia humana, es que ayuda a definir en qué consiste la inteligencia matemática. Delimitar los mecanismos, las habilidades y capacidades que conforman este tipo de inteligencia nos ayuda a entenderla mejor, a potenciarla y a utilizarla de forma más adecuada. La inteligencia matemática, si la queremos definir por los problemas a los que se enfrenta, sería la que nos hace capaces de seguir líneas de razonamiento lógico, la que nos hace establecer y comprender las relaciones entre conceptos abstractos como, por ejemplo, los números. Y también nos ayuda a buscar un lenguaje que nos permita comprendernos a nosotros mismos y al mundo que nos rodea.

No te asustes, que no voy a meterme en temas tan profundos. Hay tres o cuatro conceptos que sí van a aparecer a lo largo del libro y que, si existiera una «definición de la inteligencia matemática», formarían con toda seguridad parte de ella: abstracción, generalización, lógica, identificación de patrones. No tengo la pretensión de hacer un

tratado psicológico, filosófico o fenomenológico sobre la inteligencia matemática, el razonamiento lógico y todo eso. No me siento capaz, seguramente escribiría un rollazo impresionante y no creo que aportara gran cosa. En su lugar, juntos vamos a tratar de ver la inteligencia matemática en acción, experimentándola en carne propia, poniéndola en práctica. La idea es no sólo aproximarnos a cómo la mente de los matemáticos actúa frente a los problemas de la lógica, el álgebra o la geometría, sino también, y de alguna manera a la vez, echar un vistazo al fruto de la inteligencia matemática, es decir, al acercamiento matemático a la realidad cotidiana. A lo largo del camino, iré proponiendo diversos problemas, retos y juegos que permitirán practicar en primera persona los mecanismos de la inteligencia matemática. Algunos de ellos los explicaré paso a paso, tratando de diseccionar los razonamientos que participan en la resolución de un problema o en su mismo planteamiento. En otros casos te propondré que los hagas tú, intercalados en el texto o en los ejercicios al final de cada capítulo. Aprovecharás más el libro si los afrontas, los resuelvas correctamente o no.

A veces la inteligencia matemática se identifica con la inteligencia que suponemos a un robot o a un ordenador: la capacidad de cálculo y de procesamiento de datos, sin lugar para emociones o empatía. Estoy seguro de que ya sabes que no es así pero, por si acaso, dejémoslo claro. No identifiques la inteligencia matemática con saber multiplicar de memoria números de ocho cifras. Eso es habilidad de cálculo, y nada

más. Es cierto que gran parte de las matemáticas tienen que ver con números y que los cálculos son frecuentes. Pero no pienses que estoy de broma cuando digo que hay matemáticos a los que se les dan fatal los números y las cuentas. Ser buen matemático y tener gran capacidad de cálculo son dos cosas diferentes. Te pongo dos ejemplos de matemáticos extremadamente inteligentes, dos genios de naturaleza muy diferente.

Alexander Grothendieck fue uno de los matemáticos más creativos del siglo xx. Realmente revolucionó las matemáticas, en concreto las relaciones entre el álgebra y la geometría. Pensó más allá de lo que se había pensado hasta entonces. Después de él, una parte amplia de las matemáticas nunca se volvió a hacer de la misma manera. Hoy en día seguimos explorando las matemáticas que Grothendieck inventó. Era un genio en el sentido más intenso y clásico de la palabra, alguien que supo ver más lejos de lo que los demás ni imaginaban. Y sin embargo, se dice que era muy malo con los números, que no sabía pensar «en concreto». Cuentan que un día, durante una conversación matemática, alguien le pidió a Grothendieck que dijera un número primo cualquiera. Él se sorprendió un poco: «¿Un número primo en concreto?, ¿de verdad?», y tras un segundo de pensamiento dijo: «El 57». Pero resulta que, como seguramente has notado, el 57 no es primo (es 19 por 3). Desde entonces, y medio en broma, al 57 se le conoce como el «primo de Grothendieck».

En el otro extremo de su relación con los números, con los números concretos, un verdadero amigo de las cifras

fue Srinivasa Ramanujan. Ramanujan era un muchacho indio sin prácticamente formación matemática que de forma autodidacta y espontánea llegó a comprender muchos secretos de los números. De alguna forma, sus trabajos llegaron a dos de los mayores matemáticos de su época, los ingleses Godfrey Hardy y John Littlewood, que le acogieron en Cambridge. Ramanujan pasó varios años en Cambridge logrando resultados maravillosos. Enfermó de tuberculosis y murió demasiado joven. Una anécdota que cuenta Hardy de Ramanujan dice que cuando fue a visitarle en Putney, por estar enfermo, Hardy había viajado en un taxi con el número 1729 y le dijo a Ramanujan que le parecía un número intrascendente, sin gracia. «No», respondió Ramanujan, «es un número muy interesante, es el menor número que puede expresarse como suma de dos cubos de dos maneras diferentes». Efectivamente, 1729 es 1^3+12^3 y también 9^3+10^3. Hasta ese punto llegaba la intimidad de Ramanujan con los números. Hoy en día, a los números que pueden expresarse de dos formas diferentes como suma de dos cubos se les llama «números de Hardy-Ramanujan».

Vamos a ir calentando la cabecita. Al final de cada capítulo habrá uno o más ejercicios que pueden darte un poco de entretenimiento pero que sobre todo sirven para que despiertes un poco al matemático que llevas dentro y que empieces a comprender cómo piensa. Cuidado, son muy importantes, forman parte del libro, una parte sustancial. Te van a ayudar a sacar provecho de este libro, si es que tiene

alguno. Contribuirán a aclarar lo que te cuento en la obra y, lo que es más importante, a conocer y entrenar a tu matemático interior.

Esta vez tienes un solo ejercicio, no es gran cosa, simplemente para jugar un poco con los números.

Ejercicio 1: Encuentra algún número que pueda ponerse como suma de dos cuadrados de dos formas diferentes.

2.
Somos matemáticos

Dicen que la matemática es el lenguaje en el que está escrita la naturaleza. ¡Jo!, pues ya podría haber escogido otro más fácil, ¿no? Bueno, seguramente es el mejor lenguaje que podría elegir. Aunque yo no estoy tan seguro, cien por cien seguro del todo, ya sabes, de que la naturaleza esté escrita en lenguaje matemático. Yo creo que, en gran parte, las matemáticas las ponemos nosotros, son nuestra manera de ver las cosas, forman parte de nuestra condición humana, más que de las cosas en sí. Bueno, pues eso, que para mí gran parte de lo que consideramos la «naturaleza matemática de la realidad» al final la estamos poniendo nosotros. Es algo así como «la forma humana de ver la naturaleza». Nosotros vemos la realidad con tiempo, con espacio y con matemáticas, al menos. ¿Están el tiempo, el espacio y la matemática realmente en la naturaleza? No me siento capacitado para responder a eso. No digo yo que todo sea así, eh, que siempre sea evidente que las mates son algo que ponemos nosotros. Y es que a veces uno alucina con fenómenos de

la naturaleza y piensa: «Venga ya, esto no puede ser casual, esto es matemática pura en estado natural». Muchas veces vemos propiedades matemáticas que parecen pertenecer a «las cosas en sí» sin duda, independientemente de que quien las mire sea un humano. Por ejemplo, las abejas y sus mallas hexagonales. El hexágono es la forma óptima de cubrir el plano gastando la menor cantidad de material, así que las abejas están resolviendo, de forma instintiva, un problema de optimización muy importante. Lo de que el hexágono es la forma óptima no lo digo por decir o por exagerar. Está demostrado matemáticamente. Ya hablaremos de eso más tarde, con más calma. Otro ejemplo chulísimo de matemática presente en la naturaleza son esas cigarras que aparecen en periodos primos. Es alucinante, te cuento: resulta que existen unas especies de cigarras en Estados Unidos que viven bajo el suelo, cogiendo nutrientes y tal, y que cada cierto tiempo salen a montar una escandalera tremenda y aparearse. Pero ese «cada cierto tiempo» no es cualquier cosa. Es… ¡un número primo de años! Hay una especie que sale cada 17 años, otra que sale cada 13 y otra que sale cada 7. No tengo ni idea de cómo hacen para saber que han pasado 17 años, pero ¿por qué lo hacen? Tampoco está muy claro, pero la explicación más plausible es que si en el mismo lugar aparece un depredador también de modo periódico, la mejor forma de coincidir con él lo menos posible en el exterior es salir en un periodo que sea un número primo de años. Pongamos por caso que el depredador sale cada 4 años. Si tú sales cada 6 años, te lo vas a encontrar cada 12. Si sales cada

8 años, te lo encuentras cada vez que sales, pero si sales cada 7 años, te lo vas a encontrar cada 28 años. Como especie, merece la pena, la verdad. Parece difícil, a la vista de ejemplos como éste, resistirse a pensar que los números primos (y otros conceptos matemáticos) están en la naturaleza de forma implícita.

Una cosa que tengo más clara que esto de si las matemáticas están implícitas en la naturaleza o son cosa nuestra es que los seres humanos somos matemáticos, esencialmente matemáticos. Para empezar, hay una serie de cuestiones obvias y que compartimos con gran cantidad de otros seres de los que pueblan este planeta: la capacidad para contar, medir, hacer sencillos cálculos... Todo esto viene de muy antiguo, por mecanismos evolutivos que se pierden en la oscuridad de los tiempos. Se ha comprobado que los leones, los lobos y, sobre todo, las hienas son capaces de contar rudimentariamente, o al menos tener en cuenta la cardinalidad (el número de elementos) de distintos conjuntos de objetos, plantas o animales. Se sabe que algunos de los simios superiores también pueden contar y hacer ciertos cálculos. Es bastante curiosa la investigación de la neurobióloga Margaret Livingstone, de la Medical School de Harvard. Esta científica quería comprobar si los macacos Rhesus (que viven por la India y China) podían adquirir habilidades aritméticas, o sea, asociar símbolos a cantidades (nuestros números, por ejemplo). Probó con cantidades desde 0 a 25. Para simbolizar las primeras usó los números que utilizamos nosotros, del 0 al 9, y a partir del 10 usó letras. A continuación les daba a elegir símbolos de éstos, y los macacos elegían el símbolo que correspondía a una cantidad mayor de gotas de agua o de zumo. La cosa fue a más porque les hacía elegir entre una suma o un solo símbolo. Por ejemplo, a un lado ponía 5+7 y al otro 9. En unos cuatro meses los macacos aprendieron a sumar dos números y comparar el resultado con un tercer número. O sea, que llegaban a saber que 5+7 significa algo mayor que 9. Al parecer, el concepto de número está inscrito de forma muy profunda en nuestro ser. A lo largo de la historia este concepto ha evolucionado hasta tener varios significados diferentes. Cuando decimos «número» nos podemos estar refiriendo a cosas muy diferentes. ¿Te has preguntado alguna vez qué es un número? No te preocupes, más adelante en este libro voy a dar una respuesta a esa pregunta, que me parece fabulosa, pero aún no es el momento. Vale, de momento tenemos claro que tanto los animales como los estadios más primitivos de nuestro cerebro son capaces de asimilar conceptos numéricos y hacer algunos cálculos básicos. Son habilidades que podríamos calificar plenamente como matemáticas, y que están en nuestro camino evolutivo.

Pero quiero ir más allá. Sin entrar en grandes profundidades antropológicas, metafísicas, psicológicas o filosóficas. Déjame hablar para el «humano medio» de nuestros días, que ve la tele, ha ido al colegio, sale con los amigos o le gusta ir al monte. Ese ser humano que alguna vez piensa eso de que «a mí no se me dan bien las mates» o lo ha oído decir. Que tiene a su matemático interior abandonado del

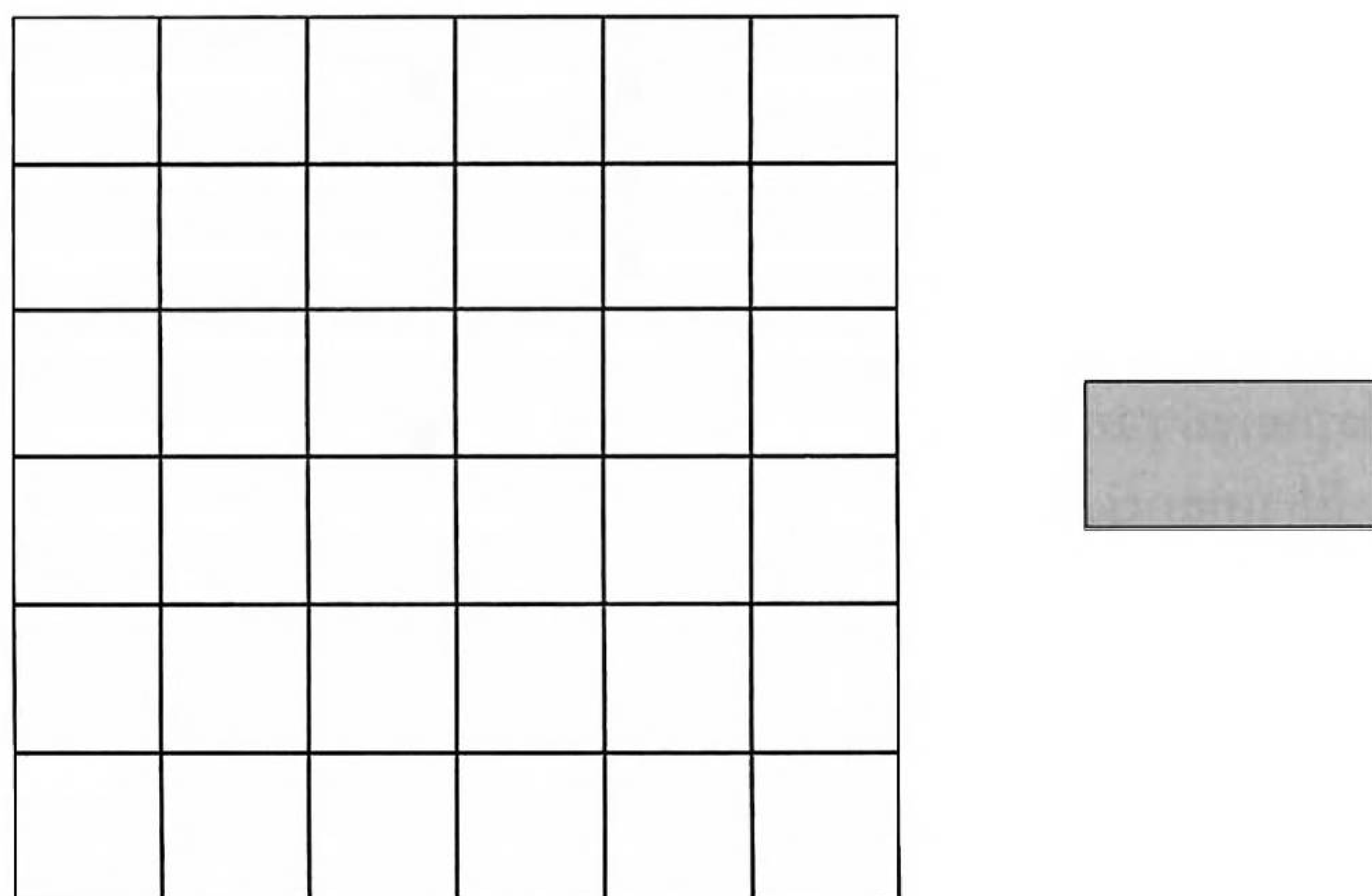
todo, pero lo tiene, aunque no sea consciente de ello. ¿Y qué sabe hacer ese matemático que todos tenemos dentro? Todo el mundo, salvo algunas excepciones, posee una capacidad hermosa de razonamiento lógico del mismo modo que todo el mundo, salvo excepciones, puede correr. Y las excepciones no son tantas, porque, al igual que existen ayudas para algunas personas que por sus «propios medios» no serían capaces de correr, también uno puede buscar apoyos para su razonamiento lógico. Está claro que aunque uno no sea Usain Bolt o Hisham El Gerrouj, todos tenemos la capacidad de correr. La podemos practicar y entrenar o podemos abandonar nuestro cuerpo hasta provocarle una incapacidad que quizá no tendría por qué tener, a base de sedentarismo y hamburguesas rellenas de perritos calientes rellenos de queso. Con la capacidad de razonamiento lógico pasa lo mismo. El mecanismo lo tenemos, y no hace falta que todos seamos genios matemáticos, pero tampoco está bien que nos abandonemos del todo. ¿Tú has visto la cantidad de *runners* que corren hoy en día? Es verdad que es como una especie de moda obsesivo-compulsiva, pero también lo es que muchos de los corredores aficionados que inundan nuestros parques y calles disfrutan con lo que hacen y van mejorando, cada cual dentro de su nivel. ¿Te imaginas lo mismo pero en mates, o con el pensamiento en general? ¿Te imaginas que de repente la gente se aficiona, así, en masa, a darle al coco? Igual deberíamos ponerle un nombre en inglés como pasa con los *runners* y el *running*, y así a lo mejor la gente se aficionaba más: ejércitos de *thinkers*, aficionados al *thinking* mejorando

día a día y disfrutando con lo que hacen. Molaría. Y no me parece que la comparación sea descabellada. Estamos naturalmente preparados para correr, mira a los niños chiquitines. Y estamos naturalmente dotados para el pensamiento lógico (mira a los niños chiquitines). Somos perfectamente capaces de seguir un razonamiento lógico. Y eso se puede entrenar. Hemos llegado a uno de los primeros puntos clave. Créeme, el razonamiento lógico es la base de las matemáticas. El auténtico núcleo de las matemáticas está en el razonamiento lógico, no en saberse un millón de decimales de π o en ser capaz de dividir números de ocho cifras. El centro de las matemáticas es una mezcla de imaginación, creatividad y razonamiento lógico, y eso se concreta en la argamasa que mantiene en pie y hace crecer el edificio de las matemáticas: los teoremas y sus demostraciones.

En matemáticas, el concepto de «demostración» de una afirmación es clave. Una demostración es la reducción por equivalencias de un razonamiento aparentemente complicado a una colección de evidencias. Vamos a poner un ejemplo sencillo y verás a qué me refiero.

Imagínate que tenemos un tablero dividido en cuadrados, en casillas cuadradas, y lo queremos cubrir con piezas rectangulares de dos cuadrados de largo por uno de ancho. Podemos usar tantas piezas como necesitemos y las podemos poner en horizontal o en vertical. El tablero puede tener la forma que quieras: cuadrado, rectangular, con forma de estrella, cualquier tablero que puedas imaginar. Libertad total. El objetivo es cubrir todas las casillas de nuestro tablero, sin

Figura 1: Un tablero de seis casillas de alto por seis de ancho, y una pieza de dos de ancho por una de alto.

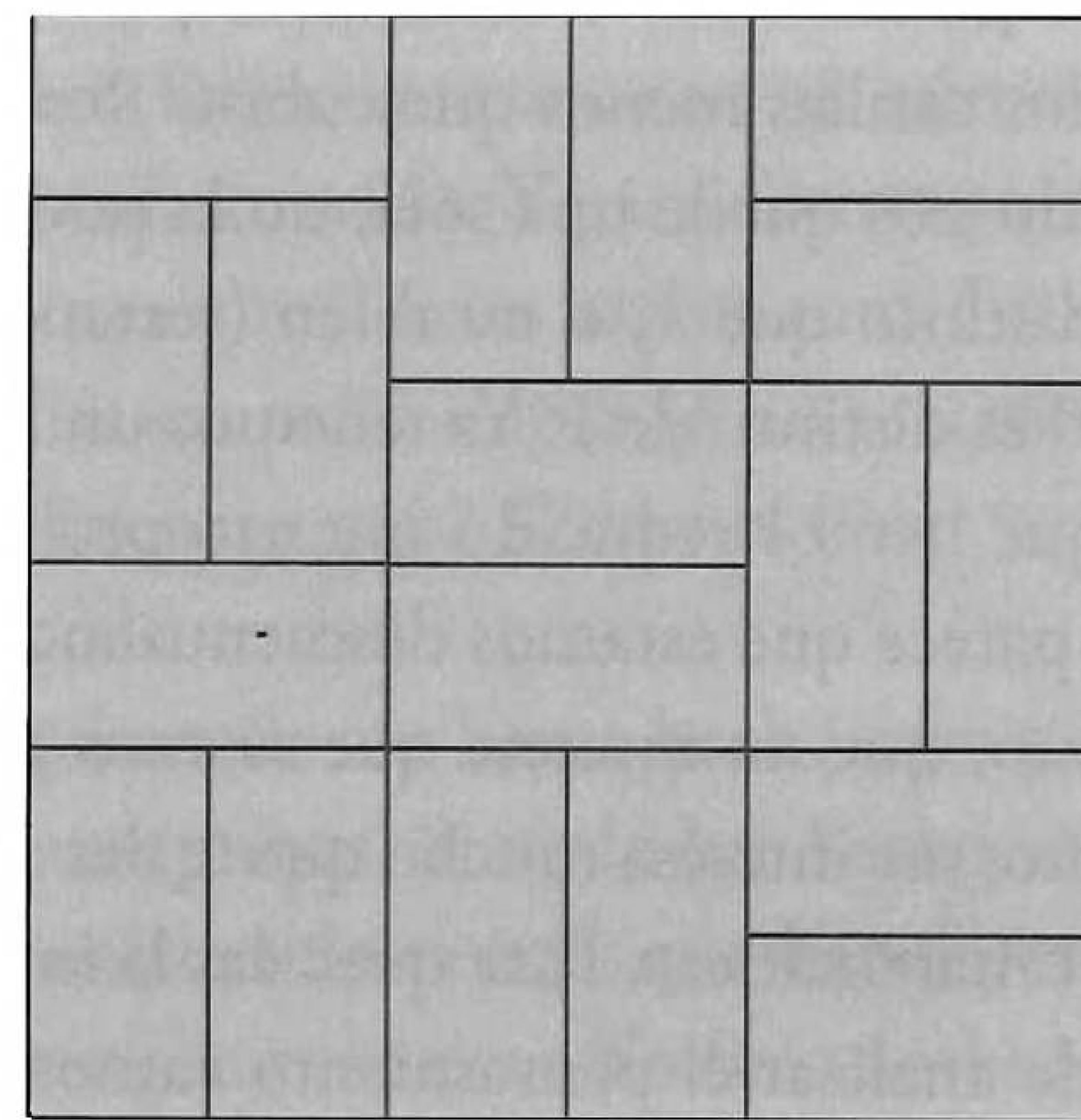


dejar ningún hueco y sin montar una pieza encima de otra. Pongamos que el tablero mide seis casillas de alto por seis de ancho, algo como en la figura 1.

¿Podemos rellenarlo con las piezas esas rectangulares? Piensa un poco y verás que sí. Aquí en la figura 2 tienes una forma de hacerlo y por supuesto hay muchas más. Sería chulo contar todas las posibles formas, pero no podemos entretenernos, sigamos adelante.

Si te digo que ahora el tablero tiene cinco casillas de alto por cinco de ancho, entonces ¿qué me dices?, ¿se puede cubrir ahora o no? Hummm, piensa un poco, ¿cómo cambia ahora la situación? Fíjate que el cambio es radical. Antes bastaba con que me dieras un ejemplo de «cubrimiento», como

Figura 2: Un cubrimiento cualquiera del tablero de seis por seis con piezas de dos por uno.



el de la figura 2 (u otro) y ya estaba respondida la pregunta. Ahora no, porque cubrir ese maldito tablero de cinco por cinco es imposible, y para eso necesito un argumento. Y un argumento es algo más potente que un ejemplo, ¿verdad? El argumento que podemos usar es que el número de casillas del tablero es impar, y con nuestras piezas, cumpliendo las reglas, sólo podemos cubrir un número par de casillas. ¡Toma! Eso es un argumento lógico, no hace falta ni dibujar el tablero. Vamos a desmenuzarlo un poco, que merece la pena (de verdad, esto es hacer matemáticas con un problema sencillo pero a nivel serio). Cada vez que ponemos una pieza cubrimos dos casillas, porque no podemos montar una sobre otra, así que cubrimos el doble de casillas que piezas hayamos

puesto, y eso es siempre un número par. Si tratamos de cubrir un número impar de casillas siempre nos sobrará o faltará una. Si quieres piénsalo así: cada vez que ponemos una pieza, tenemos dos casillas menos que cubrir. Restamos de dos en dos. Cuando nos quede una sola, no la podremos cubrir porque 2 es distinto que 1, o también (restando una pieza más) porque 0 es distinto de 1. Ya tenemos un hecho básico, evidente, al que hemos reducido nuestro problema inicial. Perdona si te parece que estamos desmenuzando demasiado el razonamiento, que no interesa que seamos tan meticulosos. En absoluto, me interesa mucho que te des cuenta de qué significa hacer matemáticas. Para que veas la importancia de esta manera de analizar el pensamiento vamos a ir un paso más allá. Un paso grande. Está claro que nunca podremos cubrir un tablero con un número impar de casillas, da igual que sea un tablero cuadrado o no. Pero déjame que te pregunte, ¿entonces podemos siempre cubrir cualquier tablero, tenga la forma que tenga, mientras tenga un número par de casillas?, ¿aunque no sea un tablero cuadrado?, ¿qué me dices?, Vamos a enunciarlo en forma de conjetura, que mola más:

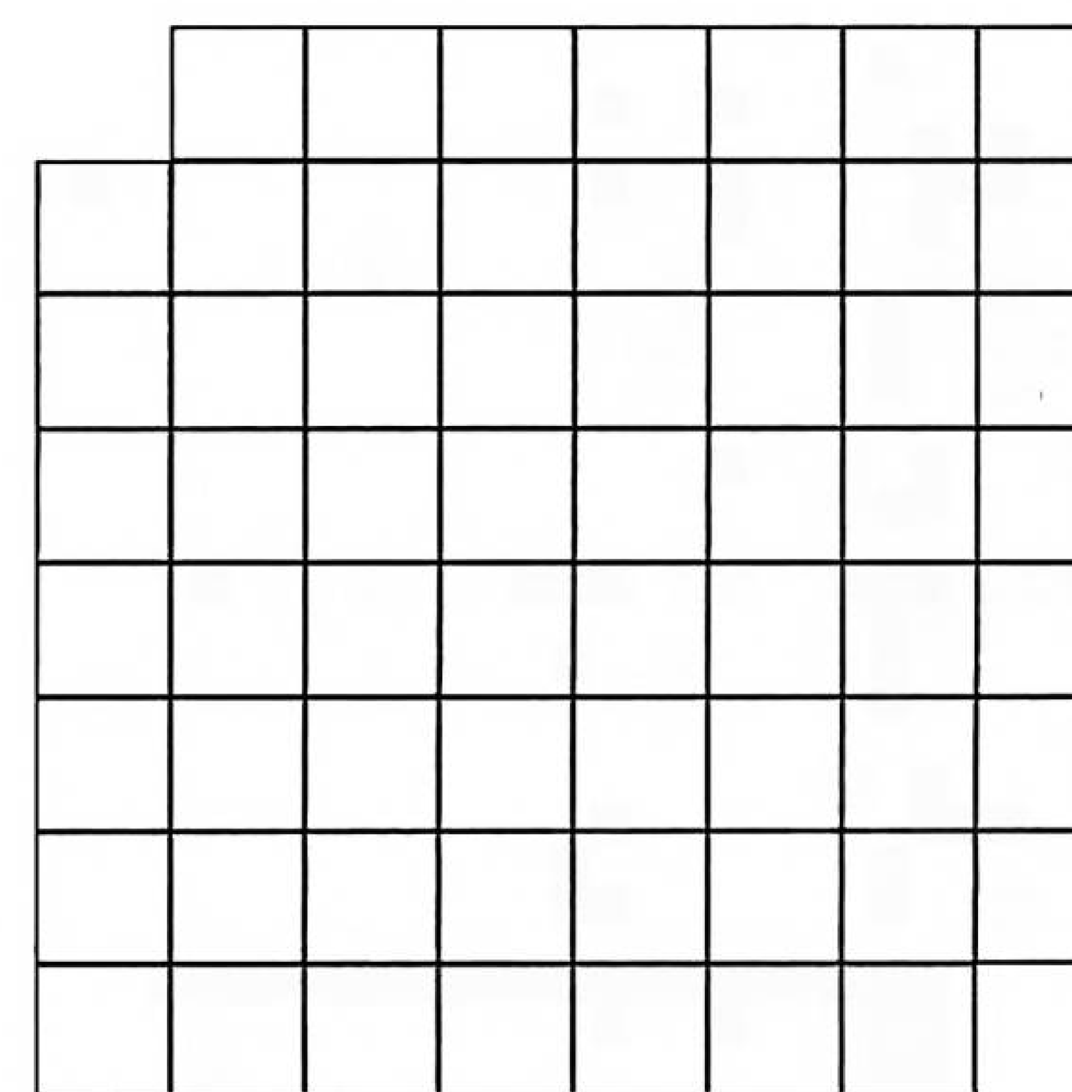
Conjetura 1: Cualquier tablero con un número par de casillas puede cubrirse con piezas de dos casillas de largo por una de ancho.

Cierra ahora el libro, piensa un poco y cuando tengas una respuesta razonada, aunque sea un poquito, sigue leyendo. Cuanto más hayas razonado, más vas a aprovechar lo que

sigue. Para dar una respuesta tienes que dar o bien una demostración de que cualquier tablero con un número par de casillas se puede cubrir, o bien un contraejemplo, es decir, un tablero, de la forma que sea, con un número par de casillas, que no pueda cubrirse. Y para decirme que no se puede cubrir, me tienes que dar un argumento. Lo de que el número de casillas sea par o impar ya no te sirve... ¿Ves como hemos dado un paso más? Cierra el libro y trata de hallar una respuesta, de verdad.

Bueno, espero que me hayas hecho caso y hayas tratado de buscar una respuesta. Si no lo has hecho será culpa tuya, es una oportunidad de pensar que has desaprovechado, y mira que no tenemos muchas. En fin, vamos con la respues-

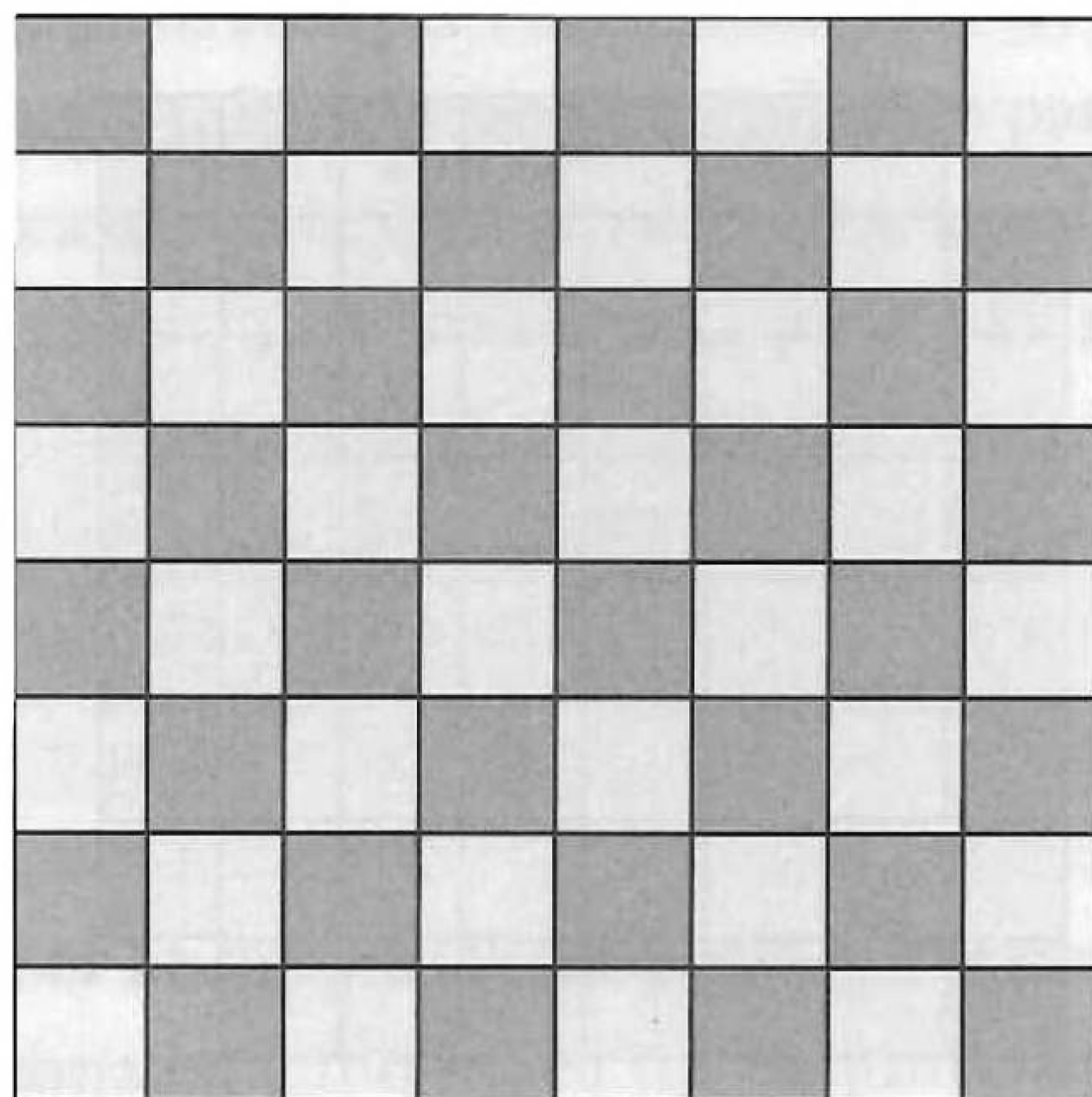
Figura 3: Un tablero de ocho por ocho casillas al que hemos quitado dos esquinas opuestas.



ta. La verdad es que no, no se puede cubrir cualquier tablero con un número par de casillas. Ok, ahora querrás que lo demuestre, ¿no? Como te he dicho, basta un contraejemplo. Mira el de la figura 3: es un tablero de ocho por ocho casillas al que le hemos quitado dos esquinas opuestas.

El número total de casillas es 62, ¿no?, así que para cubrirlo necesitamos 31 piececitas. Pero yo te digo que no hay manera de poner 31 piececitas de forma que cubran ese tablero. Y tú te fías de mí, que para eso soy matemático y el que escribe el libro, ¿no? No. En matemáticas uno no se fía ni de Pitágoras. Aquí sólo valen las demostraciones y los argumentos. Imagínate el tablero este de ocho por ocho casillas antes de quitarle las dos esquinas. Vamos a colorearlo como se colorean los tableros de ajedrez (que, por cierto, tienen ocho por ocho casillas); tenemos 32 casillas blancas y 32 casillas negras. Cuéntalas si no me crees (me encanta el escepticismo). Queda como en la figura 4.

Figura 4: Un cuadrado de ocho por ocho casillas coloreado como un tablero de ajedrez.



¡Ajá!, quitemos ahora las esquinas. Fíjate que las esquinas opuestas tienen el mismo color, ¿verdad? Pongamos que es el negro. Hemos quitado dos casillas negras y ninguna blanca, con lo que quedan 30 casillas negras y 32 blancas. ¿A dónde quiero llegar? Seguramente ya lo vas intuyendo. Cuando colocamos una pieza para cubrir, ya sea vertical u horizontalmente, cubrimos siempre una casilla negra y una blanca, no se puede hacer de forma que cubramos dos negras o dos blancas. O sea que con las 31 piececitas que necesitamos para cubrir 62 casillas, lo hagamos como lo hagamos, siempre vamos a cubrir 31 casillas negras y 31 casillas blancas. Nunca vamos a poder cubrir 30 negras y 32 blancas, como en el tablero que queremos cubrir. Así que es imposible. Y eso es una demostración de que ese tablero sin las esquinas opuestas es un contraejemplo a nuestra conjetura, de modo que es falsa.

Para terminar esto del tablero déjame que te diga una cosa más que podemos aprender de este ejemplo: la diferencia entre razón suficiente y razón necesaria, que eso es algo que los matemáticos usamos mucho. Decimos que A es una razón (o condición) necesaria para B si para que se dé B hace falta, o sea, es necesario, que se dé A. Para ganar una carrera es necesario correrla. Si no se da A es imposible que se dé B. Si no corres, no puedes ganar. Eso sí, puede que se dé A

y aun así no se dé B. Puede que corras la carrera y no la ganes. Léelo otra vez si quieres, despacio y comprendiendo, y vamos con nuestro ejemplo. Fíjate en los tableros: para que lo podamos cubrir con las piezas esas de dos por uno, hace falta que el número de casillas sea par, si no, es imposible: ser par es una condición necesaria para poder cubrirlo.

Y decimos que A es una razón suficiente de B si para que se dé B basta que se dé A, o sea, es suficiente que se dé A. Por ejemplo, basta con que el tablero sea un cuadrado de lado par para que podamos cubrirlo con nuestras piezas de dos por uno.

Fíjate en nuestro ejercicio. El hecho de que el número de casillas sea par es razón necesaria pero no suficiente para que podamos cubrir el tablero. Te das cuenta, ¿no? Si es razón necesaria y además suficiente decimos que son equivalentes, y para esas cosas a los matemáticos nos encanta decir «si y sólo si»; nos mola tanto que incluso a veces lo ponemos «sii» con dos íes (también tenemos derecho a nuestros caprichitos, ¿no?). Cuando A es razón necesaria y suficiente de B decimos que A y B son equivalentes. Y la equivalencia es una herramienta lógica que usamos mucho.

Al escribir este capítulo, que se titula «Somos matemáticos», sólo pretendía una cosa: que te des cuenta de que todos tenemos una parte matemática, innata si quieres llamarlo así, y que no sólo sirve para que podamos aprender más o menos fácilmente a contar, o las operaciones aritméticas más sencillas, sino que va más allá a un nivel más profundo: tenemos una capacidad para la lógica por el mero hecho

de ser humanos (quizá compartimos parte de esa capacidad con otros seres vivos, no lo sé). Los mecanismos de la lógica están inscritos en nosotros, somos seres lógicos. Nuestro matemático interior, ese pequeño Yoda que está escondido dentro de nosotros, es un ser lógico, capaz de aprender a construir argumentos y a detectar fallos de argumentación. Pero, cuidado, hay que ser muy cautelosos en esto. La lógica es poderosa pero tiene un reverso tenebroso: argumentos falsos, falacias, afirmaciones que parecen ciertas pero no lo son, etc. Nuestro matemático interior ha de estar entrenado, y eso requiere un poco de esfuerzo, pero merece la pena. Vamos a darle un poco de caña con un par de ejercicios.

Ejercicio 1: Demuestra que el cuadrado de todo número par también es par. Si te das cuenta, lo que vas a ver es que el hecho de que un número cualquiera sea par es razón suficiente para que su cuadrado también lo sea. ¿Es también razón necesaria? Para eso haría falta que los cuadrados de los impares no sean pares, ¿te atreves a demostrarlo?

Ejercicio 2: Vamos ahora con un ejercicio de cierta dificultad, pero que te va a dejar muy satisfecho si logras resolverlo. No te preocupes, te ayudaré un poco, y además puedes mirar el capítulo de pistas y el de soluciones. El ejercicio consiste en encontrar todos los números n mayores que 1 tales que n^2-1 sea divisible entre 8. Por ejemplo, el 2 no lo es, porque 2^2-1 es 3, que no es divisible entre 8. Pero el 3 sí es uno de los números

que buscamos, porque 3^2-1 es 8, que, obviamente, es divisible entre 8. La forma de proceder que te sugiero es la siguiente: primero haz unos cuantos ejemplos, prueba con el 4, el 5, el 6..., no sé, hasta que te sientas con fuerza para hacer una conjetura general. Y ahora trata de demostrar tu conjetura, ya sea dando un argumento o buscando un contraejemplo. Si encuentras un contraejemplo, utilízalo para ayudarte a elaborar una nueva conjetura hasta que lo logres.

3. Las matemáticas no son ciencia

«La matemática no es ciencia», decía Jorge Wagensberg en un breve artículo suyo en *La Vanguardia* en 2013. El artículo dice muy bien algo que es bastante natural, aunque suene provocativo: las matemáticas, efectivamente, no son una ciencia.

Y no lo son porque, a diferencia de las ciencias, las matemáticas no pretenden explicar la naturaleza, ni su verdad está sometida a la adecuación de sus resultados con los dictados de la realidad. Me dirás que eso no es así del todo, ¿no? Que está eso que se llaman «modelos matemáticos», que sí pretenden explicar la naturaleza o el funcionamiento de procesos humanos, industriales, etc. Sí, es verdad, pero eso son más bien aplicaciones de las matemáticas. No son las propias matemáticas. La diferencia no es siempre evidente, pero es importante. Cuando aplicamos modelos matemáticos, estamos usando las matemáticas como una herramienta y como un lenguaje que las ciencias o las ingenierías utilizan para sistematizar su descripción de la realidad. Con esas herramientas

matemáticas pueden estudiar el comportamiento de los fenómenos que analizan e incluso hacer predicciones. Al usar la matemática como lenguaje aprovechan su rigor y su capacidad expresiva. Pero lo que ha de adecuarse a la realidad, y lo hará mejor o peor, es la ciencia que trata de describir esa realidad, ya sea la física o la biología, por ejemplo. La lógica de las matemáticas utilizadas seguirá siendo verdadera aunque se haga una aplicación errónea de esa lógica a la realidad. Te pongo un ejemplito sencillo: imagínate que quiero describir el movimiento de un balón chutado por un futbolista en línea recta. Hago un par de mediciones y veo que al cabo de medio segundo el balón se ha alejado cinco metros del futbolista, y al cabo de un segundo se ha alejado diez metros. ¡Ajá! Con esos resultados, me hago un modelo matemático que dice que el esférico al cabo de t segundos se habrá alejado $10 \cdot t$ metros de la posición del jugador. Concuerda con los resultados obtenidos hasta el momento. Usando este modelo ya puedo hacer predicciones y calculo que al cabo de un minuto, o sea 60 segundos, el balón estará a 600 metros del jugador. Me coloco a 600 metros, le digo al jugador que chute y al cabo de un minuto espero que la pelota llegue dulcemente a mis pies. Tras un buen rato de esperar, me canso y voy a donde está el jugador, a ver si no ha chutado, o qué pasa. Y a eso de unos 100 metros más allá del jugador me encuentro el balón tirado en el suelo. Las predicciones no se han cumplido: ¿están mal las matemáticas?, ¿hemos de revisar el concepto de multiplicación? Por supuesto que no. Es el modelo el que no era correcto. No se me ocurre un ejemplo

más tonto que éste para que veas lo simple que es la idea. Las matemáticas no fallan, nunca. Pero no porque describan la realidad de modo infalible, no; no fallan porque no están describiendo la realidad. Es la aplicación de las matemáticas lo que puede fallar o no.

Cuando digo que las matemáticas y sus resultados no dependen de su adecuación a la realidad quiero decir que el hecho de que el número 4 sea divisible entre dos, o que π sea el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, no necesita contrastarse con la realidad.

Y sin embargo, los modelos científicos sí necesitan ser ratificados por la realidad. Las ciencias hacen experimentos para comprobar los modelos que explican y predicen el comportamiento de las galaxias, los tumores o la luz. Y si los experimentos no concuerdan con lo que el modelo dice, hemos de cambiarlo. En nuestros días no sigue vigente la cosmología de los tiempos de Arquímedes; aquel modelo del cosmos está superado. Sin embargo, su matemática sigue y seguirá vigente. Un teorema es para siempre, más que los diamantes. Esta comparación entre teoremas y diamantes conecta con nuestro deseo (más o menos universal) de que algo como el amor sea para siempre, eterno. Y por eso lo simbolizamos (quien se lo puede permitir) con los diamantes, hermosos y duraderos. Y sin embargo, los diamantes también pasarán. Tardarán bastante, seguro, igual hace falta que el Sol explote, o alguna salvajada así. Yo no creo que lo vea, seré ya muy mayor. Pero sí, llegará el tiempo en que los diamantes desaparecerán. Sin embargo, después

de que el Sol explote, de que los últimos humanos se hayan perdido como lágrimas en la lluvia, aun tras el colapso de la galaxia, el teorema de Pitágoras (por ejemplo) se mantendrá vigente. La relación entre los catetos y la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo será siempre la misma. Aunque no tengamos triángulos para «comprobar» que eso es así. No hace falta comprobar nada. Las matemáticas son axiomas y definiciones, y lo que de ellos, con las reglas de la lógica, podamos extraer.

Éste es un punto un poco sutil pero importantísimo, así que, aunque sea un poco dificultoso, merece la pena explicarlo porque está en el corazón de la labor de los matemáticos. Lo vuelvo a decir: las matemáticas son axiomas y definiciones, y lo que de unos y otras podamos extraer con las reglas de la lógica. Y en eso consiste la matemática, ni más ni menos. Vamos a concretar un poco con un ejemplo. Ya aviso que la cosa es un poco abstracta, pero verás cómo lo vas a entender perfectamente, y así avanzarás bastante en la comprensión de las matemáticas. La aritmética estudia los números naturales (los de contar, de toda la vida, el 1, el 2, el 38 y todos esos). Los números naturales se construyen a partir de unos axiomas dados por un italiano llamado Giuseppe Peano. Mira los axiomas, para que te hagas una idea de cómo son, y así poder hablar de los axiomas de Peano en las reuniones familiares.

1: El 1 es un número natural.
Hasta ahí todo bien, ¿no? La cosa empieza sencilla.

2: Todo número natural *n* tiene un sucesor *n.**
Y ahí empezamos a usar símbolos, el 2 lo usamos para el sucesor del 1, el 3 para el sucesor del sucesor del uno, y así todo lo que quieras.

3: El 1 no es el sucesor de ningún número natural.
Sí, ya sé que está el cero, y lo podemos incluir si quieres, si te sientes mejor podemos sustituir el primer axioma con «el 0 es un número natural». Claro, enseguida te pones a pensar en los negativos, ¿no? Los negativos no son números naturales. Si los incluimos, pasamos a lo que se llaman números enteros, que son otra cosa. Pero que se deducen fácilmente de los naturales, no te preocupes.

4: Si dos números naturales *n* y *m* tienen el mismo sucesor, entonces *n* y *m* son el mismo número natural.
Éste sin problemas, ¿no? Pero sin este axioma sería todo un follón, la verdad. Aquí cada número tiene un solo sucesor, no como los reyes medievales, que mira cómo se lio todo con las herencias, los territorios y todo eso.

5: Si el 1 pertenece a un conjunto K de números naturales, y dado un elemento cualquiera k de K, el sucesor de k, denotado k*, también pertenece al conjunto K, entonces todos los números naturales pertenecen a ese conjunto K.
Este último axioma se llama principio de inducción matemática. Y es el más lioso, pero te lo explico luego, tranquilo.

Bueno, salvo el último, en el que me detendré un poco más, todos estos axiomas parecen ser bastante evidentes. No son axiomas por el hecho de ser evidentes (ser «evidente» es muy discutible, depende de quién lo diga). Son axiomas porque no se pueden deducir unos de otros ni se pueden deducir de otros hechos matemáticos. Son la base, no podemos ir más atrás. Si quitamos alguno de ellos la aritmética se nos va al garete (al menos tal y como la conocemos). A partir de estos axiomas podemos empezar a construir la aritmética con bases sólidas, añadiendo definiciones y empezando a obtener resultados mediante la lógica, deduciendo lo que queramos demostrar, los nuevos teoremas, de los axiomas, o de otros teoremas que ya tengamos demostrados (si no sería un engorro retroceder siempre hasta los axiomas, la verdad).

Por ejemplo, podemos definir la suma: definimos una operación que, dados dos números naturales, nos devuelva otro número natural con unas ciertas condiciones. En concreto, si tenemos los números m y n (ve acostumbrándote a usar letras para decir «un número cualquiera, me da igual cuál»), el número al que llamaremos «suma de m y n», y que escribiremos $m+n$, es el «n-ésimo» sucesor del número m. Lo de «n-ésimo» suena fatal, pero es práctico, no se me ocurre otra forma mejor de ponerlo. Así pues, $m+1$ es el sucesor de m, genial. $m+2$ es el sucesor del sucesor de m, $m+3$ es el sucesor del sucesor del sucesor de m... y así siempre. ¿Ves como lo del «n-ésimo» es feo pero cómodo? Que la definición está bien en este caso es evidente, porque por el axioma 2 todo

número tiene un sucesor, y por el axioma 4, todo número tiene solamente un sucesor, así que no hay confusión. Dados m y n, el número $m+n$ sólo puede ser uno. Bueno, pues ya tenemos suma (que no es un axioma, es una operación que acabamos de definir a partir de los axiomas). La suma da mucho de sí, ya te lo imaginas, a partir de la suma podemos definir la multiplicación, la resta y la división entre números naturales (la que tiene resto y cociente, acuérdate que aquí no hay decimales). Y usando estas definiciones podemos definir exponenciales, raíces cuadradas... y arruinar la infancia de la mitad de la población con los deberes de mates. Podemos definir a partir de ellas lo que es un número primo e incluso la aritmética modular, que son la puerta a matemáticas muy avanzadas.

Y también es muy importante que ahora podemos empezar a enunciar propiedades de la suma, y de las distintas operaciones que vayamos obteniendo. Por ejemplo, ¿se te ocurre cómo demostrar la propiedad conmutativa de la suma?, o sea, que $m+n$ es el mismo número que $n+m$. No es sencillo de primeras, pero se puede hacer usando sólo los axiomas de Peano (incluido el principio de inducción). También podrías demostrar si quieres la propiedad asociativa, o sea, que $(m+n)+p$ es lo mismo que $m+(n+p)$. La suma tiene sentido, pues, y además sirve como modelo para algunas cosas del mundo real, por ejemplo: «Si Juanito tiene tres manzanas y le doy otras dos: ¿cuántas manzanas tendrá?».

He dicho antes que iba a explicar un poco más despacio el quinto axioma, el principio de inducción matemática. Ha

llegado el momento. No hace falta que vuelvas atrás para recordarlo, te lo escribo aquí otra vez:

5: Si el 1 pertenece a un conjunto K de números naturales, y dado un elemento cualquiera k de K, el sucesor de k, denotado k*, también pertenece al conjunto K, entonces todos los números naturales pertenecen a ese conjunto K. Este axioma sirve para decir que todo lo que obtengamos por el método del «sucesor» va a estar dentro de los naturales, que no nos vamos a salir de ese conjunto, y que siempre que sepamos cómo avanzar por los naturales, podremos avanzar para siempre. Por cierto, que mediante este axioma vemos que el conjunto de los números naturales tiene infinitos elementos. Pero es que el principio de inducción es una de las herramientas más poderosas que usamos los matemáticos, y la usamos muy habitualmente. En estos momentos, mientras lees estas líneas, en algún lugar del mundo hay un matemático utilizando el principio de inducción en la oscuridad de su cuarto.

Entender por primera vez el principio de inducción no es fácil, así que no te preocupes si te haces un poco de lío. Eso sí, una vez lo domines, es una de las herramientas más poderosas de las matemáticas. Para poder explicarte mejor el poder de este principio, déjame enunciarlo de una forma algo más próxima a como lo utilizamos normalmente en nuestro trabajo.

Si tenemos una propiedad que:

- La cumple el número 1.
- Si suponiendo que la cumple un número cualquiera, podemos demostrar que también la cumple su sucesor,

entonces:

- Esa propiedad la cumplen todos los números naturales.

La idea es un poco como esos montajes de fichas de dominó: si tiras la primera, y las tienes puestas de modo que cuando una ficha cualquiera cae te aseguras de que la siguiente también cae, entonces es que van a caer todas. Observa que lo importante es que la propiedad la puedas empezar para un caso inicial, que puedas «echar a andar la caída de las piezas del dominó» y que suponiéndolo para un caso cualquiera, lo puedas demostrar para el siguiente, que el «encadenamiento de piezas de dominó» esté asegurado, que si una pieza cae, la siguiente también caiga.

Y eso, créeme, es una herramienta potente y muy utilizada. Te quiero poner un ejemplo que no sea sólo de números, para que veas el tipo de cosas que se demuestran por inducción.

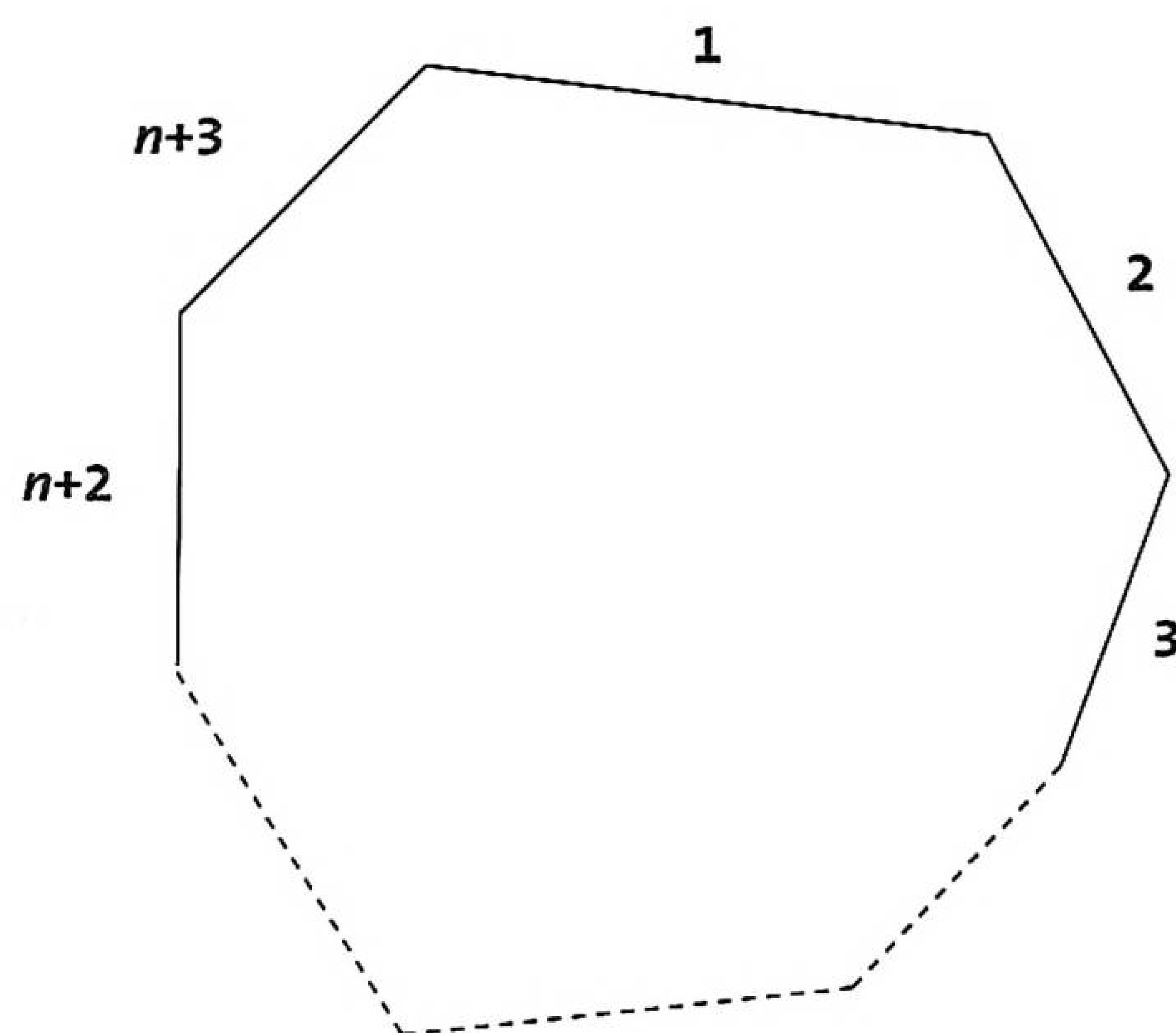
Vamos a tratar de demostrar que la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono convexo de $n+2$ lados es igual a $180 \cdot n$. Y lo vamos a hacer siguiendo el principio de inducción:

Lo primero que tenemos que hacer es demostrar que la propiedad se cumple para $n=1$. Éste es el caso inicial del que hablábamos. Cuando n es 1, resulta que $n+2$ es 3, o

sea, que tenemos un triángulo. Ya sabes que los ángulos interiores de un triángulo siempre suman 180 grados, que es 180·1 (recuerda que estamos en el caso n=1). Hecho. Aquí nos hemos basado en una propiedad de los triángulos que es conocida. Si quieres, puedes tratar de demostrarla por tus medios, buscar una demostración, o fiarte. Te recomiendo la primera opción. Yo no lo demuestro aquí para no perder demasiado el hilo.

Bueno, demostrado para el 1, ahora tenemos que ver que si suponemos que es cierto para un número cualquiera n, también lo es para su sucesor, n+1. Ésta es la parte clave (y normalmente la más difícil). Cuidado con un punto sutil. No se pide que lo demuestres para un caso cualquiera n. Se pide que si lo *supones* para n, *entonces* puedes demostrar que

Figura 1: Un polígono cualquiera de n+3 lados.

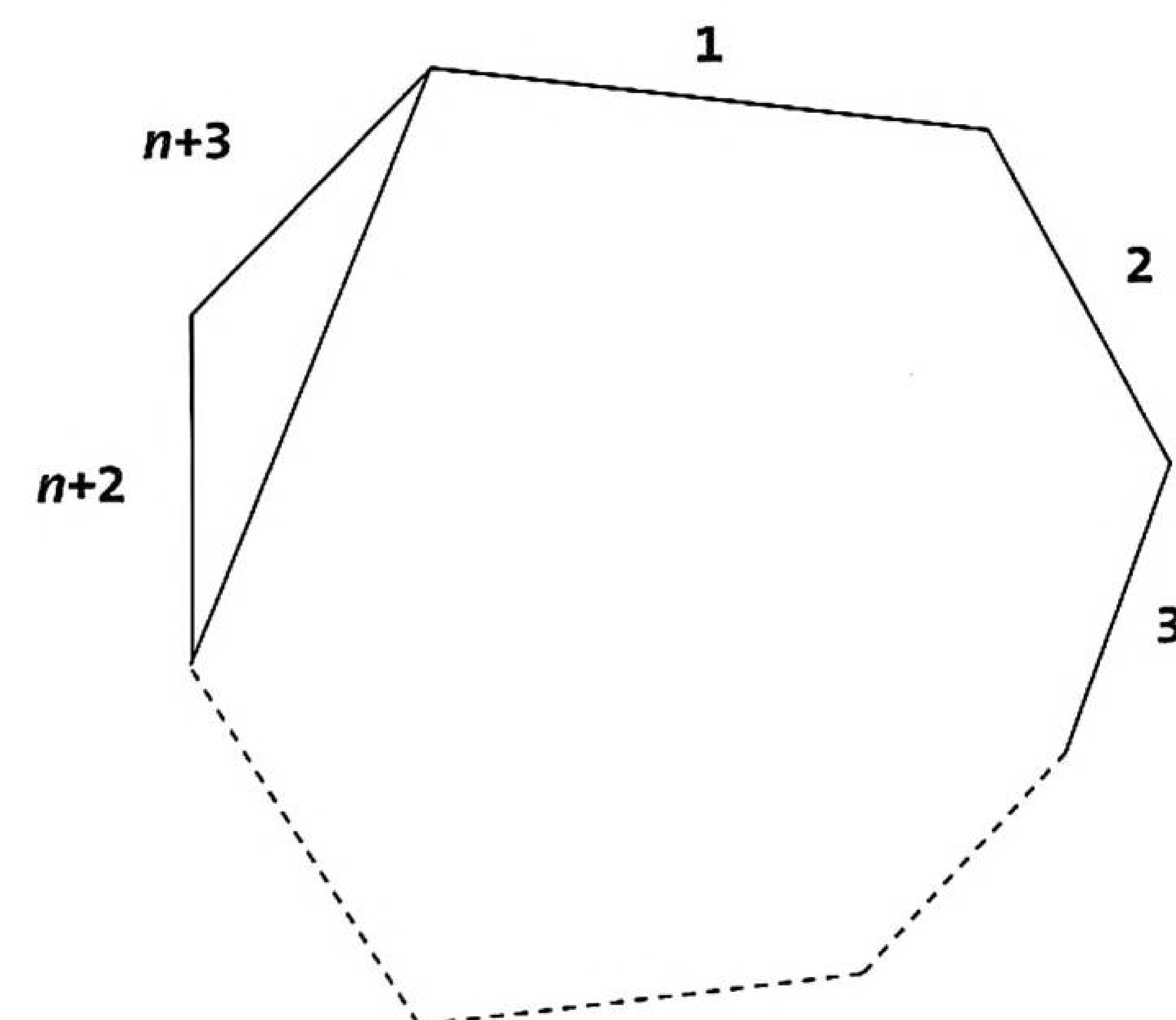


se cumple para n+1. Ok, lo suponemos pues para el caso n. Tenemos como suposición que para cualquier polígono de n+2 lados sus ángulos interiores suman 180·n. Ahora consideremos el caso n+1, a ver si lo podemos demostrar a partir de nuestra suposición. Tenemos ahora un polígono convexo de (n+1)+2 lados, o sea, n+3 lados. Fíjate en el dibujo que te pongo en la figura 1.

Bueno, juntemos ahora los vértices de dos lados consecutivos, como en la figura 2.

¿Te das cuenta? Nos queda un polígono de n+2 lados, y un triángulo. Y la suma de los ángulos interiores es la suma de los del polígono de n+2 lados y los del triángulo. Y aquí llega la inducción. Como hemos *supuesto* que la propiedad

Figura 2: El polígono cualquiera de n+3 lados al que le hemos unido dos vértices.



se cumple para el número n, tenemos que la suma de los ángulos del polígono de $n+2$ lados es $180 \cdot n$, y ya sabemos que la del triángulo es 180, o sea, que el total es $180 \cdot n+180$, es decir, $180 \cdot (n+1)$, como queríamos demostrar. O sea, que suponiendo que la propiedad se cumple para n, podemos demostrar que se cumple para $n+1$.

Hemos demostrado el caso inicial, $n=1$. Y hemos demostrado que si una pieza cae, la siguiente también cae (si suponemos que se da para n podemos probar que se da para $n+1$). Así que tenemos todos los elementos del principio de inducción, y por tanto esa propiedad se cumple para todos los números, para todos los polígonos. Todos, los infinitos que hay. Y no hemos tenido que probarlo para todos, que eso habría sido imposible. Basta con usar adecuadamente el principio de inducción. Ése es el poder de las matemáticas.

Te dejo al final de este capítulo unos ejercicios para que practiques con la inducción. Como siempre, si no tienes ganas, mira la solución, pero la cara de gusto que se te queda si lo consigues sin ayuda no tiene precio, te lo digo desde el cariño. Y si necesitas volver a mirar despacio esto de la inducción porque sientes que no lo tienes asimilado del todo, vuelve tranquilamente cuantas veces quieras. Entender por primera vez el principio de inducción cuesta un poco.

Hemos visto que las matemáticas funcionan a partir de los axiomas, las definiciones de los nuevos conceptos que van enriqueciéndola, y los mecanismos de la lógica que van construyendo nuevas verdades, nuevos teoremas. Y éstos son permanentes, tan permanentes como la misma lógica que la

sustenta. Y como acabamos de ver con el principio de inducción, tiene algunos mecanismos especialmente poderosos o útiles. Tu matemático interior está sonriendo confortado: acabas de comprender la esencia íntima de su personalidad y de su trabajo. En este proceso de conoceros mejor habéis dado un paso de gigante.

En fin, las matemáticas se construyen a veces a través de sencillas evidencias y razonamientos creativos. No me resisto a contarte el principio del palomar, que es otra de esas cosas evidentes, pero que tienen un gran poder. El principio del palomar dice lo siguiente:

Si tenemos más palomas que huecos en un palomar, en alguno de los huecos hay más de una paloma.

No puede ser más evidente. Y uno dice: ¿y de aquí se puede sacar algo de provecho? Pues sí, si se sabe cómo.

Como a lo mejor con lo de los polígonos ya has tenido bastante abstracción geométrica por hoy, vamos a poner un ejemplo más de «andar por casa» con esto del principio del palomar. Vamos a demostrar una cosa que en principio parece rara de demostrar, que no tiene pinta de tener gran relación con las matemáticas: yo afirmo, sin miedo a equivocarme, que en cualquier fiesta (o grupo humano en general, pero lo de la fiesta mola más) hay al menos dos personas que conocen exactamente al mismo número de asistentes a la fiesta. Siempre, sin excepción, puedes apostar lo que quieras. Y para demostrarlo, vamos a usar el principio del palomar.

Bien, pongamos que hay n personas en la fiesta (ya sabes lo de nuestro gusto por usar letras para decir «un número

cualquiera»). Imaginemos que las personas de la fiesta son las palomas, y que tenemos una serie de huecos numerados (nuestro palomar) con los números 1 al n. Vale, ahora vamos a meter a cada persona en el hueco que corresponde al número de asistentes que conoce, y veremos que hay que repetir hueco, o sea, que hay dos personas que conocen al mismo número de asistentes. Me dirás: «Pero si no sabemos a cuántos conoce cada cual, ¿te lo vas a inventar o qué?». No me hace falta saberlo, eso es lo bueno, esto son mates. Mira, vamos a dividir el razonamiento en dos casos. En el primer caso supongamos que la persona que menos gente conoce en la fiesta sólo se conoce a sí misma, es una de esas personas que caen en las fiestas sin saber por qué. Esta persona, como sólo conoce a una (a sí misma), estará en el hueco con el número 1. Pero, entonces, ¿qué pasa con la persona que conoce a más personas de la fiesta? Pues que no puede conocer a todas, ¿no? Porque si fuera así conocería también a esa persona solitaria que no conoce a nadie. O sea, que entonces los huecos van del 1 al n-1 como mucho. Ya, pero ¿y si la persona que conoce a menos personas de la fiesta conoce a alguien más que a sí misma? Ése es el segundo caso. Bueno, pues en este caso la persona que menos gente conoce está en el hueco del 2 o más adelante. O sea, que los huecos con personas van del 2 al n como mucho (ahora sí que el que más conoce podría conocer a todos los asistentes y por tanto estar en el hueco número n). En cualquiera de los dos casos, y sin saber a cuántos conoce cada cual, sí que es seguro que sólo hay, como mucho, n-1 huecos ocupados por las

n personas. Hay más personas que huecos. Así que sí, es seguro del todo que hay dos personas que hay que meter en el mismo hueco, es decir, que conocen exactamente al mismo número de asistentes.

Ya ves cómo de una cosita tan evidente como el principio del palomar hemos extraído una consecuencia no tan evidente, al menos a primera vista: lo de la fiesta. De nuevo, esto son matemáticas. Creo que ya te vas dando cuenta de que las matemáticas son algo más que cálculo, técnica y memoria. Que la creatividad al usar la lógica y los argumentos es central.

Para terminar, quiero que te fijes en una cosa que los matemáticos nombramos mucho y es la capacidad de abstracción y generalización. Tranqui, que son palabras que parecen muy gordas, pero cuyo significado es muy claro. Tu matemático interior está encantado. Si le dijeran algo así como «define tu personalidad en dos palabras», casi seguro diría: «Abstracción y generalización». Así que atención, que vas a conocerle muy bien.

Fíjate en lo que ha pasado tanto cuando hemos utilizado el principio de inducción, como el principio del palomar. Lo que hemos puesto en acción son los mecanismos lógicos, abstractos, y los hemos aplicado a problemas concretos, el de los polígonos o el de las personas en la fiesta. Por un lado, haciéndolo funcionar todo, estaban los argumentos lógicos, y junto a ellos, las peculiaridades de cada caso. Cuando hablábamos de los polígonos, el argumento de inducción era independiente del problema; es un argumento general, por-

que es abstracto. Siempre que podamos enunciar un problema de modo que entre en las condiciones para usar el principio de inducción, podremos hacerlo. La abstracción nos permite extraer las características fundamentales de los objetos matemáticos y sus relaciones, y entonces poder aplicarlos a situaciones diversas, o sea, generalizar.

Pero la relación entre generalización y abstracción también funciona en el otro sentido. El hecho de que los argumentos lógicos sean generales nos permite hacer matemáticas de forma abstracta, despegada de los ejemplos particulares, o incluso, en principio, de cualquier relación con «el mundo real», sea eso lo que sea. Digo «en principio» porque la historia ya nos ha dado múltiples ejemplos de matemáticas que parecían abstractas, alejadas de la «realidad», y que años después han sido clave en los nuevos modelos físicos, en la biología, en la ingeniería, y en aplicaciones que ni siquiera se sospechaban en el momento en que fueron desarrolladas esas matemáticas.

Generalización y abstracción se hallan íntimamente relacionadas, son dos caras de la forma de trabajar de las matemáticas.

Vamos a explorar un poco más esto de la abstracción y la generalización. No exagero al decir que es un punto clave. ¿Te acuerdas de la suma y sus propiedades? Piensa ahora en la suma y los números enteros, es decir, incluyendo el cero y los negativos. El cero es un número especial, ¿verdad? Porque si se lo sumamos a cualquier otro, éste se queda igual. Eso se resume diciendo que el 0 es el elemento neutro de la

suma (nombrecitos que nos gusta poner, ya sabes). Y otra cosa chula es que para cada número en que se te ocurra pensar hay otro, su «parejita», que sumado a él da 0. La parejita del 2 es el -2, y la del 17 el -17..., vamos, que la del n es el $-n$, y la del $-n$ el n, ya sabes.

Podemos pensar esa operación en abstracto, pensar en un conjunto de lo que sea, no tienen por qué ser números, y en una operación que, como la suma, tome dos elementos del conjunto y nos devuelva otro elemento del conjunto. Y que esa operación sea asociativa, como la suma. Recuerda lo que significaba asociativa, si tenemos tres elementos da igual aplicar la operación a dos de ellos y al resultado aplicarle la operación con el tercero que hacer la operación con el primero y el resultado del segundo y el tercero. Con palabras es un lío, con la suma era que $a+(b+c)=(a+b)+c$, más fácil de ver. Ya no estamos pensando en números ni en sumarlos, y mucho menos en las manzanas de Juanito. Un conjunto con una operación así, en la que además tenemos un elemento neutro, como en la suma, y cada elemento tiene su «parejita» (lo llamamos su «elemento inverso» para ser más finos), es lo que llamamos en matemáticas un grupo. Y si encima la operación es conmutativa (es decir, que el orden de los factores no afecta al resultado), se llama grupo abeliano. Por ejemplo, los enteros con la suma son un grupo, y encima abeliano. Ahora que tenemos las propiedades abstractas de un grupo, podemos generalizar, aplicarlo a mil cosas diferentes.

Piensa, por ejemplo, en las horas de un reloj, 12 horas, dejémonos de a.m y p.m. La operación será la de adelantar

el reloj. Es una operación asociativa, ¿te das cuenta? El elemento neutro sería adelantar doce horas, porque nos quedamos donde estuviéramos. ¿Y el elemento inverso? Pues las horas que hagan falta para llegar a las 12. El elemento inverso del 3 horas es 9 horas, el de 5 horas es 7 horas, etc. Ya ves que eso del reloj se comporta como un grupo, y encima abeliano.

Piensa ahora en el conjunto de movimientos que podemos hacer a un cuadrado sin que se note: dejarlo quieto, girarlo 90º a la derecha, reflejarlo con respecto a una línea horizontal que pase por su centro, reflejarlo con respecto a una línea vertical que pase por su centro, reflejarlo con respecto a una diagonal. Y piensa en la operación «composición de movimientos», o sea, hacer un movimiento y luego otro. Está claro que si componemos dos movimientos que dejan igual al cuadrado, el resultado lo dejará igual. O sea, que tenemos una operación en el conjunto de esos movimientos. Y si te fijas, esa operación es asociativa. ¡Es como la suma! Los movimientos del cuadrado con la composición de movimientos también son un grupo. En este caso no es un grupo abeliano, la composición de movimientos no es conmutativa, no es lo mismo primero girar y luego reflejar que al revés. Lo puedes comprobar si les pones numeritos a las esquinas, por ejemplo. Al girarlo o reflejarlo el cuadrado se queda igual, pero los números de las esquinas no se quedan en el mismo sitio. Haciendo esto te das cuenta de que no es lo mismo girar y luego reflejar que al revés. Los números de las esquinas no quedan igual.

Ya ves, grupo es un concepto abstracto y por tanto general. Cualquier cosa que demostremos para los grupos vale exactamente igual para los enteros con la suma, y para los movimientos del cuadrado con la composición. Y para los innumerables grupos que existen. Así que trabajando en abstracto, conseguimos resultados universales. Y de eso precisamente van las matemáticas. Por eso se dice que son el mundo de lo abstracto y lo general. Y ahí radica gran parte de su poder y de su belleza.

Ejercicio 1: Demuestra por inducción que la suma de los n primeros números es $n \cdot (n+1)/2$

Ejercicio 2: Demuestra que el conjunto de formas de poner a un grupo de personas en una mesa es un grupo no abeliano con la operación «cambiar de sitio».

4. ¿Qué es un número?

¿Te has planteado alguna vez en serio la pregunta «qué es un número»? No conozco a mucha gente que lo haya hecho, pero la verdad es que es una pregunta muy buena. A mí esa pregunta me la han hecho muchas veces, yo mismo me la he hecho muchas veces, y la respuesta no es sencilla. Estamos terminando la primera parte, la más difícil del libro, y es un buen momento para contestar a esta pregunta, siento que ya estás preparado. Es una buena cuestión. Por un lado, mucha gente piensa que las matemáticas son fundamentalmente «cosa de números», aunque si has llegado hasta aquí seguramente ya te has dado cuenta de que no es así (ni siquiera son lo principal). Y, por otro lado, quiero hablar ahora de números porque la respuesta a esta pregunta nos enseña muchas cosas acerca de qué son las matemáticas y cómo se desarrollan.

Con la palabra «número» en realidad nos estamos refiriendo a cosas diferentes. ¡Quién lo diría, eh! Hay conceptos muy distintos a los que nos referimos como números, y

que sirven para cosas diferentes, aunque ya verás que tienen cierta relación entre ellos.

Hablemos primero de los números naturales, los enteros y el cero. Cuando uno es pequeño y piensa en números, piensa en el 3, en el 7, en el 21... Esos números que sirven para contar cosas, para los problemas de manzanas de Juanito. O para contar con los ojos cerrados cuando jugamos a pillar o al escondite, ¿te has dado cuenta de que en ese momento no estás contando nada en particular, que simplemente «estás contando»? Es un uso bastante abstracto de los números, si lo piensas. Bueno, esos números son los naturales, supongo que se les llama así porque son los primeros que a uno se le ocurren, los que usaban los seres humanos desde la prehistoria, y los que utilizan otros animales que tienen cierto concepto de número.

Pero esos números enseguida se quedan cortos, porque además de contar cosas que tenemos, a veces queremos contar cosas que no tenemos, carencias, cosas que debemos. Y aunque sí lo podríamos hacer distinguiendo con palabras 3 sacos de trigo que tengo y 3 sacos de trigo que debo, es más cómodo usar números negativos. Y también, matemáticamente, tiene mucho más sentido introducir números negativos. Si has llegado hasta aquí en el libro seguro que ya vas adquiriendo cierto sentido matemático de la vida, y estarás de acuerdo en eso, en que es más «matemático» introducir números negativos que distinguirlos con palabras. La razón está de nuevo en la abstracción y la generalidad que nos permite algo tan versátil como los números negativos. Histori-

camente, los números negativos fueron un buen avance, un logro que permitió usar las matemáticas y todo su poder en cosas que hasta entonces no se habían utilizado.

Pero quien vino realmente a completar los números naturales y enteros fue el cero. Eso sí que fue un logro. El pobre cero, tan humillado, al que no damos importancia, es fundamental en las matemáticas. En la teoría y en la práctica. En la teoría, nos permite tener un elemento neutro para la suma, podemos ver a los enteros como a un grupo, y tiene un papel central en tantas y tantas cosas que no sé cómo podríamos vivir sin el cero. Y en la práctica, ¿qué me dices? El cero nos permite, por ejemplo, tener una notación posicional para los números. Y eso es muy útil. Notación posicional significa que en un número cada cifra significa una cosa distinta dependiendo de su posición. Por ejemplo, en el número 313 el 3 de la derecha indica tres unidades y el de la izquierda trescientas. El cero en un sistema así es muy importante para poder formar cualquier número. Y costó, eh, costó llegar al cero tal y como lo conocemos hoy. Se dice que los primeros en introducir el cero fueron los chinos y los indios, y que a Occidente llegó a través de los árabes y Fibonacci. Otras culturas que también usaron el cero (aunque no de forma completa como se hace hoy en día) fueron la de los babilonios o los mayas, que no sólo se han hecho matemáticas en la India y en Occidente. Así que, ya ves, el cero es un número también, como el 17, pero de alguna forma son diferentes, ¿verdad?

Más allá de los enteros, hay otros números que llamamos racionales. Antes incluso de que el cero hiciera su irrupción

estelar en el mundo de las matemáticas, ya la gente andaba manejando otros números además de los de contar. Los podemos llamar los números «de repartir», los racionales, las fracciones de toda la vida (hay quien les llama «quebrados», nunca supe por qué). Los números racionales salen también en los problemas del colegio, cuando queremos repartir tres tartas entre quince amigos, o cuando queremos verter cinco litros de agua en ocho botellas a partes iguales. Los racionales no sólo expresan repartos o distribuciones, sino que también sirven para expresar proporciones.

Desde el punto de vista de las matemáticas, los racionales son tremendamente importantes. ¿Te acuerdas de los enteros, que formaban una estructura de grupo? Pues los racionales, las fracciones, forman una estructura más potente. Fíjate que si multiplicamos un entero por otro, obtenemos también un entero. Y si multiplicamos un entero cualquiera por 1, obtenemos ese mismo entero, no ha cambiado nada, es como lo del 0 con la suma, que no cambia el resultado. Por eso al 1 se le llama el elemento neutro del producto. Te acuerdas de que con la suma cada número tiene su inverso, ¿verdad? Entre los dos suman el elemento neutro, el 0. Recuerda que el inverso de cada número es el mismo pero con signo cambiado. Bueno, pues, con el producto eso no se puede hacer. Si tienes un entero, y quieres multiplicarlo por otro para que te dé el elemento neutro del producto, el 1, resulta que no siempre puedes, tienes que usar fracciones. El inverso de un número entero n es el número $1/n$. Y da igual el racional que cojas, el número n/m tendrá inverso,

que es el m/n: multiplicando uno por otro, te queda el 1, el elemento neutro del producto. O sea, que los enteros no sólo son un grupo, sino que tienen el comportamiento ese con respecto a dos operaciones, y encima esas dos operaciones se pueden combinar bien. Si te gusta la terminología matemática, se dice que el producto es distributivo con respecto a la suma. Se escribe así: $m\cdot(n+p)=m\cdot n+m\cdot p$. Bueno, pues a un conjunto que se porta así con esas dos operaciones se le llama «cuerpo», y los racionales son un cuerpo con la suma y el producto. Los enteros no, pobrecitos.

Los racionales son números, de acuerdo, pero no lo son del mismo modo que los enteros. Para empezar, podemos dividirlos siempre sin salirnos de ellos, pero además tienen una cosa muy especial que los enteros no tienen. Fíjate en $2/4$ y $1/2$ y dime, ¿son el mismo número? La verdad es que se escriben diferente, pero representan la misma cantidad, o la misma fracción, o la misma proporción, como quieras. Hummm, esto no pasaba con los enteros, ¿no? El 2 y el 4 eran distintos, y punto. Vale, uno es múltiplo del otro, pero no son la misma cosa, no es como el $1/2$ y el $2/4$. Así que cada uno de los números racionales es en realidad un «representante» de toda una familia de números que son, en algún sentido, iguales. Y esa familia es infinita. Por suerte, cada una de esas familias tiene una representante destacada, una fracción que las representa a todas sin lugar a dudas, de la forma más eficaz posible. Es lo que se llama la fracción irreducible. Una fracción a/b se dice que es irreducible si a y b no tienen ningún divisor en común. Así, de entre $2/4$ y $1/2$ (y

la infinita familia que representa la misma fracción, incluyendo a 4/8, 5/10, etc.) la irreducible es $1/2$. Y dos fracciones irreducibles son diferentes del todo, no representan la misma cantidad, o proporción, o lo que sea…

Las estructuras de grupo, cuerpo (y anillo, pero eso ya tendrás que investigarlo por tu cuenta), son muy importantes en la matemática moderna, abstracta. Pero los racionales son útiles e importantes desde hace muchos siglos. En los tiempos de Pitágoras (allá por el siglo VI antes de Cristo) fueron muy relevantes. Se dice que Pitágoras tenía un grupo de adeptos, los pitagóricos, que en muchas cosas funcionaban como una especie de secta mística, y que estaban muy interesados por las mates. Los pitagóricos decían que todo era proporción, y que la naturaleza, el mundo, la música, el cosmos… podía todo expresarse con proporciones. La verdad es que hicieron muchos avances, tanto en resultados teóricos como prácticos. Las matemáticas con las que contaban eran muy rudimentarias, y ellos comenzaron a preparar las bases de lo que hoy día es la matemática. Los pitagóricos comenzaron a preocuparse por la abstracción y la generalización, allanando el camino para los gigantes Euclides y Arquímedes, que contribuyeron de modo decisivo a desarrollar lo que hoy en día conocemos por matemáticas.

Lo de los pitagóricos y las proporciones tiene mucho sentido, la verdad. Los números racionales, las proporciones, expresan más o menos todo lo que nos rodea, y de una forma bien bonita. Las proporciones entre las longitudes de las cuerdas y las notas musicales que surgen al pulsarlas se

expresan mediante racionales y explican la música, ya desde los pitagóricos. Y eso, unido a otras observaciones, les llevó a explicarlo todo mediante proporciones. Y estaban encantados porque todo cuadraba... Hasta que dejó de cuadrar.

La historia de por qué los racionales no bastan y cómo se supo eso es muy chula, tiene que ver con los pitagóricos y con lo de «cuadrar». Esta historia está envuelta en un halo de leyenda y misterio. Se dice que uno de ellos, llamado Hipaso de Metaponto, fue capaz de demostrar que la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 1 no se puede expresar con proporciones, no es un racional. Y encima lo demostró usando el teorema de Pitágoras. Vaya palo para esta gente, ¿no? Les fastidian la teoría con la que estaban tan a gustito y encima usando el teorema más famoso de su superhéroe Pitágoras. Esto no puede acabar bien. Pero antes de contarte el desdichado final de esta historia, déjame que te enseñe la demostración de por qué la diagonal de ese cuadrado no puede medirse con un número racional. No es difícil y, además, estás leyendo esto porque quieres saber cómo funcionan las matemáticas, ¿verdad? Pues ya sabes que las matemáticas funcionan así, con demostraciones, y viéndolas trabajar en directo, siguiendo sus argumentos, es como mejor puedes comprender en qué consiste la inteligencia matemática. Vamos con ello, si te hace falta papel y boli, cógelo, que te espero.

Tenemos un cuadrado cuyos lados miden todos 1 (todos son iguales, que para eso es un cuadrado decente). Dibujamos la diagonal. ¿Cuánto mide? Preguntémosle a Pitágoras:

la diagonal forma un triángulo rectángulo con dos de los lados del cuadrado. La diagonal es la hipotenusa, y los lados los catetos, así que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, 1 al cuadrado es 1, así que la diagonal al cuadrado mide 2. La diagonal, pues, mide «raíz cuadrada de 2», que se escribe $\sqrt{2}$. Vale, y ahora viene lo de Hipaso, demostrar que la raíz cuadrada de 2 no es racional. Abre bien los ojos porque aquí viene otra de las herramientas lógicas preferidas de los matemáticos. Señoras y señores, en acción la «reducción al absurdo»: supondremos que $\sqrt{2}$ es racional y si de ahí, con argumentos lógicos, llegamos a una contradicción, a un absurdo, entonces resulta que nuestra suposición inicial no era correcta, o sea, que $\sqrt{2}$ no puede ser racional. Manos a la obra, intentaré ser lo más claro posible en todos los pasos de la demostración. Es posible que algún paso tengas que pensarlo un par de veces para convencerte de que está bien. Tómate el tiempo, no te fíes de nada. Eso es parte del quehacer diario de los matemáticos, créeme, todo el rato andamos revisando la corrección de los pasos de las demostraciones, las nuestras y las de los demás.

Si $\sqrt{2}$ es racional, será de la forma a/b, hasta ahí nada espectacular. Podemos suponer, además, que a/b es lo que se llama una fracción «irreducible», es decir, que a y b no tienen ningún divisor en común, no se puede simplificar. Esto siempre lo podemos suponer, porque si no fuera así, si a y b tuvieran algún divisor en común, llamémosle d, pues sustituimos a por a dividido entre d, y sustituimos b por b divi-

dido entre d y ya tenemos una fracción irreducible. Esto es de capital importancia para la demostración que sigue a continuación. Estamos suponiendo que $\sqrt{2}$ es igual a a/b y que a y b no tienen divisores comunes, ¿es eso posible? Veamos, tenemos esta igualdad:

$$\sqrt{2} = a/b$$

Empecemos elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación, y la igualdad se mantiene, porque si dos cosas son iguales y las elevamos al cuadrado, siguen siendo iguales. Así que tenemos:

$$2 = a^2/b^2$$

Vale, pasamos b^2 al lado izquierdo de la igualdad, y como estaba dividiendo, pasa multiplicando, con lo que tenemos que:

$$2b^2 = a^2$$

¡Ajá! Aquí los números empiezan a hablar, ¿sientes a tu matemático interior removiéndose de placer? Fíjate, esto quiere decir que a^2 es par, porque es 2 multiplicado por algo (por b^2 en concreto). ¡Esto no lo sabíamos antes! Las manipulaciones algebraicas, aunque sean sencillas como en este caso, bien hechas, revelan nuevas cosas para el ojo atento. Y para el ojo experimentado, más aún, porque si a^2 es par, entonces a es par. ¿Por qué? Porque cualquier número impar elevado al cuadrado es impar, así que si a^2 es par, necesariamente a es par. Un dato que desconocíamos de partida, y que verás que es de máxima importancia.

Bueno, pues si a es par, entonces será igual a 2 multiplicado por algo, como todos los pares. Si llamamos c a ese «algo» tenemos que $a = 2c$. Volvamos ahora a la ecuación que teníamos, pero sustituyendo a por $2c$. Como sabíamos que:

$$2b^2 = a^2$$

sustituyendo a por $2c$ (o sea, a^2 por $4c^2$), tenemos que:

$$2b^2 = 4c^2$$

¡Ajá!, de nuevo los números quieren hablar: dividimos ambos lados de la igualdad entre dos (si dos cosas son iguales, al dividirlas entre dos, siguen siendo iguales):

$$b^2 = 2c^2$$

Y aquí tenemos lo que los números querían decirnos: resulta que b^2 también es par y, por lo tanto, b también lo es.

Llegamos entonces a una contradicción, porque nuestro punto de partida era que a y b no tenían ningún divisor en común. Pero resulta que ambos son pares, o sea, que el 2 divide tanto a a como a b. Y por tanto nuestro punto de partida era erróneo. No existe una fracción que sea igual a $\sqrt{2}$.

Esto da al traste con el mundo de proporciones de los pitagóricos. Bueno, no seamos trágicos, no lo elimina, simplemente resulta que no es suficiente, que hay cosas más allá de las proporciones, de las fracciones, de los números racionales. A esos números más allá de los racionales en matemáticas se les llama «irracionales». Pero no quiere decir que sean contrarios a la razón, ahora ya sabes por qué.

Te he dicho antes que esta historia tenía un final trágico, envuelto en la leyenda. Hay quien dice que Hipaso de Metaponto fue asesinado por los pitagóricos por haberles fastidiado lo de las proporciones. Otros cuentan que no hubo tal asesinato, sino que simplemente le dijeron que «para ellos estaba muerto». Algunas versiones sostienen que los pitagóricos ya sabían de la existencia de los irracionales pero lo mantenían en secreto, y que la caída en desgracia de Hipaso fue por revelar ese secreto. En cualquier caso, lo que es cierto es que la plácida existencia de los racionales se quebró ya en tiempos de los antiguos griegos con la aparición de números como $\sqrt{2}$.

Si te has dado cuenta, los enteros los podemos ver como racionales, ¿verdad? El entero n lo podemos ver como el racional $n/1$ (y todos los de su misma familia, todas las fracciones equivalentes a ésa). Así que, de alguna forma, los racionales extienden a los enteros, los completan. Aunque ya hemos visto que no del todo. Hay números que no son racionales. Por ejemplo, $\sqrt{2}$, y otros bien famosos, como π o e. En realidad hay infinitos irracionales. Luego te cuento más sobre eso del infinito.

Hemos encontrado pues una nueva clase de números, los irracionales. Ambos, los irracionales y los racionales, pertenecen a un mismo conjunto de números, que son lo que los matemáticos llamamos los números «reales». Entre nosotros, podemos llamarles los «números de medir», así como los enteros eran los «números de contar» y los racionales los «números de repartir». Los números reales nos

permiten medir longitudes, y algunas de esas longitudes son racionales o incluso enteras (como el lado del cuadrado que hemos visto antes) y otras son irracionales, como la diagonal de ese mismo cuadrado.

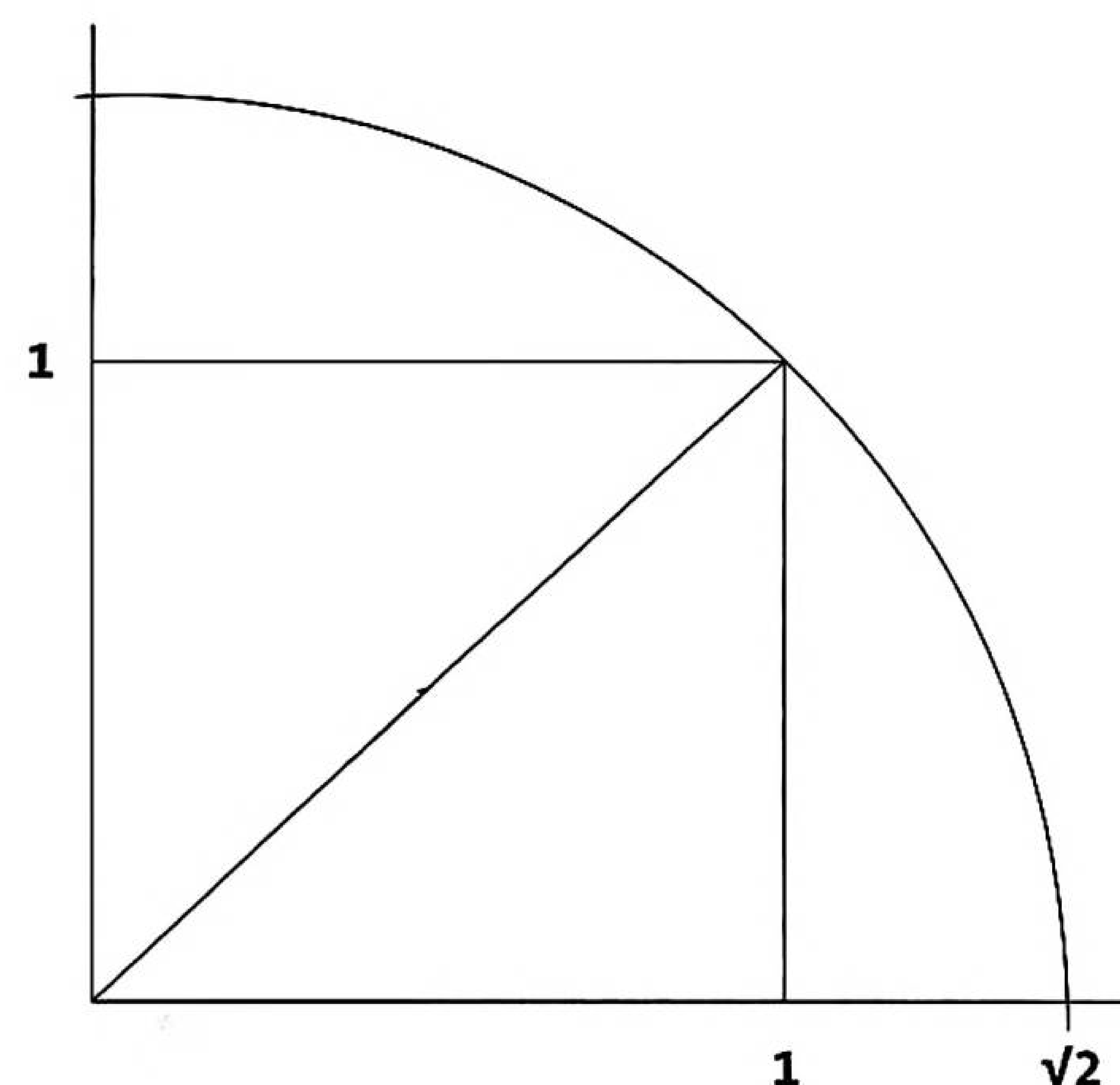
Este nuevo conjunto de números, los reales, ¿tienen algo de especial o son parecidos a los otros? Para empezar, en cuanto a su estructura, forman un cuerpo, como los racionales. O sea, que podemos dividir con tranquilidad, además de tener, por supuesto, la suma y la multiplicación. Pero sí, sí que los reales tienen algunas cosas especiales. Digamos que los números reales son los números «con decimales», y al decir «con decimales» quiero decir con decimales de cualquier tipo. Por ejemplo, que no tengan ningún decimal. O sea, que los enteros se pueden ver como reales. O que tengan unos cuantos decimales, poquitos, como ½, que es 0,5. O incluso que tengan infinitos decimales. De los que tienen infinitos decimales, algunos los podemos describir fácilmente, como ⅓, que es 0,333…, infinitos decimales pero todos son el 3. Y hay otros que tienen infinitos decimales y que no los podemos describir de forma sencilla, porque no siguen ninguna regla; por ejemplo, eso le pasa a π. Los decimales de los racionales siempre se pueden describir fácilmente porque en todos los racionales las cifras decimales empiezan a repetirse a partir de un cierto punto, lo cual es una característica suya. Vamos, que los racionales también se pueden ver como números reales. De modo que ahora los reales se extienden a los racionales. Por otro lado, los decimales de los números irracionales no siempre

se pueden describir tan fácilmente, son más especialitos, no se repiten a partir de ningún punto.

Ya, pero entonces, ¿cómo podemos saber su valor si no podemos escribir ni describir todos sus decimales? La pregunta es complicada, y creo que este capítulo está siendo muy exigente, pero déjame contarte una forma de ver los reales que quizá te puede ayudar con esto.

Imagínate una línea horizontal, una recta tan larga como quieras, infinita (segunda vez que sale el infinito, al final del capítulo hablo sobre él, te lo prometo). Podemos ver cada punto de esa línea como un número real. Así de simple. Veamos unos ejemplos. Para empezar, coloca el 0 donde quieras, así tenemos una referencia que llamamos «origen». Para tener otra referencia, medimos una distancia, la que queramos, y ahí colocamos el 1. Bien, ya podemos empezar a colocar los reales, todos. Algunos son fáciles de colocar con precisión, otros no tanto, pero todos están ahí. Colocar los enteros es fácil: vamos multiplicando la distancia del 0 a 1 y los podemos colocar. Hacia adelante (pongamos que adelante es hacia la derecha) irán los positivos, y hacia atrás, los negativos. Fácil. Para los racionales tampoco es difícil. Si queremos saber dónde está el número m/n multiplicamos la distancia del 0 al 1 por m y la dividimos por n. Hay incluso formas de hacer eso con regla y compás, es posible que lo hicieras en el colegio. Los griegos ya lo hacían, era muy lista esa gente. ¿Y qué pasa con los irracionales? Bueno, es seguro que están en la recta, y algunos incluso se puede saber dónde exactamente. Si tomas un círculo de diámetro 1 y lo echas a rodar, cada vez que da

Figura 1: Cómo situar √2 en la recta de los números reales.



una vuelta entera está midiendo π. O por ejemplo, para saber dónde está exactamente $\sqrt{2}$ aunque no sepamos calcular todos sus decimales, dibuja un cuadrado de lado 1 (la distancia del 0 al 1), que tenga una esquina en el 0. Clavas la punta del compás en el cero, lo abres hasta la esquina opuesta midiendo la diagonal, y ya tienes $\sqrt{2}$. Giras el compás y ya puedes marcar $\sqrt{2}$ en la recta de los números reales.

Bueno, pues parece que con esto todo se acaba, ¿no? Tenemos una recta en la que podemos poner cualquier número, aunque tenga tantos decimales como queramos, incluso para los que no hay ninguna regla que nos permita describirlos. Números tan especiales como π o e. Habría que ser muy retorcido para pensar en números que no sean ni siquiera reales.

Ya. ¡Je! Esto es un libro de mates, criatura. Piensa en la solución a esta ecuación: x^2=-1. O sea, para que nos entendamos, dime un número que multiplicado por sí mismo dé -1.

¡Ups! ¡No tenemos de eso! Hasta donde sabemos, multiplicar un número por sí mismo, o sea, elevar al cuadrado un número, por muy negativo que sea, o por muchos decimales que tenga, da siempre algo positivo. ¡No puede dar -1! Bueno, pues necesitamos más números, está claro. Y aquí viene una de esas cosas maravillosas de las matemáticas, ya verás. Vale, venga, necesitamos números nuevos que acaben con eso de que ecuaciones como x^2=-1 no tengan solución. ¡Vamos a inventárnoslos! No de cualquier manera, vale, que sean una cosa coherente, pero inventémoslos. Que respeten el álgebra, que se puedan sumar, multiplicar y dividir, que permitan extender los reales de una forma coherente. En fin, un invento, pero un invento que tenga sentido. Y así surgen lo que se llaman números imaginarios, también conocidos como números complejos.

Mira la pinta que tienen: para empezar, vamos a darle un símbolo a la raíz cuadrada de -1, que ahora tendrá que existir. En matemáticas la representamos con la letra i. Un número complejo cualquiera lo construimos usando dos partes, una que llamamos real, que es un número real (como su propio nombre indica), y que llamaremos *a*, y una parte que llamamos imaginaria, que es el producto de un número real por i, la raíz cuadrada de -1. Vale, pues la suma de esas dos partes es el número complejo. Así que se escribe *a*+bi, donde *a* es la parte real y *b* (o bi) la parte

imaginaria. Raro, pero funcional. En serio, muy funcional, porque si b es igual a 0, tenemos *a* + 0i, que es *a* a secas. Y *a* es un número real. O sea, que para empezar los números complejos incluyen a los reales, los extienden. Primer objetivo cumplido. Se pueden sumar, multiplicar y dividir de forma coherente (o sea, respetando la suma, multiplicación y división de los reales). Igual que los racionales y los reales, tienen estructura de cuerpo. Y encima dan solución a esas ecuaciones que no tenían sentido.

No sé. No sé si te convence mucho. Parece un truco cutre, un apaño. Pero te he dicho que ésta era una de las maravillas de las matemáticas. Te lo cuento despacio. Sé que esta cosa de responder qué es un número se está complicando mucho, pero de verdad que lo que estamos viendo es una parte importante de los fundamentos de las matemáticas, y según lo veo yo, de la cultura en general.

Bueno, vamos con los números complejos. Hay dos pegas importantes que a uno se le ocurren cuando ve el apaño este de los números de forma *a*+bi. La primera pega es: «Vale, hemos salvado las ecuaciones del tipo x^2=-1, pero ¿no habrá otras ecuaciones que se queden sin solución y haya que seguir inventando cosas todo el rato?». Es una duda razonable. La segunda pega también lo es: «Los otros números, los enteros, los racionales, incluso los irracionales, todos los reales, tienen su sentido, explican cosas fuera del puro razonamiento, sirven para contar, repartir, medir… ¿y este invento de los complejos, sirve para algo, o es sólo una construcción más o menos lógica?». Esta duda también tiene sentido.

En cuanto a lo primero, la respuesta es que no va a haber nuevas ecuaciones sin solución. Cualquier ecuación en la que tenemos una incógnita x acompañada por coeficientes enteros, racionales, reales o complejos tiene solución. Es lo que se llama el teorema fundamental del álgebra. Si quieres el enunciado riguroso, es el siguiente:

Todo polinomio en una variable de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales o complejos tiene por lo menos una solución (real o compleja).

No sé si te has parado un segundito en el nombre del teorema: Teorema Fun-da-men-tal del Álgebra. Ya te imaginas que no se llama Teorema Fundamental a cualquier cosa, ¿no? Éste es un teorema muy importante. Gran parte de las matemáticas, y por tanto de la ciencia y la tecnología que se basan en ellas, depende de este teorema. No fue fácil demostrarlo, y la historia de la demostración de este teorema es muy bonita y algo enrevesada. Pero, desde luego, hemos de dar crédito al matemático Jean Robert Argand (autodidacta, por cierto) por dar la primera demostración completa y rigurosa de este teorema. Si te acuerdas, hemos visto antes una ecuación, x^2=-1, que tiene coeficientes reales (los coeficientes son los números que acompañan a la incógnita) y que no tenía soluciones reales. O sea, que desde ese punto de vista, los reales no son un cuerpo «completo», los matemáticos lo llamamos «algebraicamente cerrado». El teorema fundamental del álgebra lo que nos dice, en términos ma-

temáticos, de estructura, es que los números complejos son un «cuerpo algebraicamente cerrado». Fin de la historia, no va a más, no vamos a generar números nuevos. La búsqueda de los números está completa. Déjame decirte que hay otros conjuntos que son extensiones de los números complejos, pero ya no los llamamos números, son algo más sofisticado. Nosotros nos quedamos aquí.

Nos queda la otra duda, ¿verdad? Si esto de los complejos sirve para algo, si tienen su reflejo en la realidad. Y aquí tenemos otro rasgo distintivo y sorprendente de las matemáticas. Ya has visto que los números complejos los hemos «inventado» para completar el edificio lógico de los números, para tener la pieza que faltaba (que ha resultado ser la única que faltaba) y así poder dar solución a todas las ecuaciones. Un asunto interno a las matemáticas, vaya. Y como pasa tantas veces en las matemáticas, y eso es tan maravilloso como sorprendente, de repente va y resulta que los números complejos sí que tienen una relación íntima con la realidad. Los números complejos se utilizan para poder explicar las relaciones entre las magnitudes eléctricas y entre las electrónicas, sus aplicaciones en ingeniería son innumerables (bueno, estrictamente «innumerables» no, es una forma de hablar, ya sabes que hay números para todo), y en física se utilizan prácticamente en todas las áreas, desde la mecánica de fluidos hasta la relatividad general. Resulta que los números complejos son los más adecuados para explicar la realidad y para construir la tecnología que nos rodea. Estoy llorando de la emoción, y tu matemático interior también.

¿Nos quedaba hablar del infinito, verdad? Enhorabuena, has llegado hasta aquí. No ha sido fácil. Descansa si quieres y vuelve más tarde para ver el final del capítulo. Si quieres. No pasa nada si te saltas esta parte final. Puedes volver cuando quieras. Eso sí, te lo advierto: voy a contar que hay infinitos más grandes que otros, algo sorprendente cuando lo escuchas por primera vez. Si te dejas tentar, sigue.

El infinito es algo que fascina a mucha gente, y no tienen muy claro si es un número o no. Como ya sabes, la palabra número designa conceptos bien distintos. Pero hasta el momento, ninguno de ellos es el infinito. No es fácil decir qué es el infinito. Normalmente, lo pensamos como una cantidad sin límite, como lo opuesto a finito, a limitado. En matemáticas normalmente se piensa como un límite, o en geometría, como puntos y líneas ideales que nos facilitan el trabajo, de forma práctica y de forma conceptual.

Pero si alguien en la historia de las matemáticas miró al infinito a los ojos, de forma seria y desde los fundamentos, ése fue Georg Cantor. Cantor se atrevió a enunciar una teoría consistente sobre los conjuntos que tienen un número infinito de elementos. Cuando un conjunto tiene infinitos elementos decimos que su cardinal es infinito. Cantor llegó a comprobar que existen cardinales que, siendo infinitos, son diferentes, unos más grandes que otros. Quiero que te atrevas conmigo a echar un vistazo a esa teoría, no es tan difícil como parece (al menos la parte que vamos a mirar) y es realmente bonita. Tiene que ver con la teoría de conjuntos, una de las ramas fundamentales de las matemáticas.

Necesitamos ponernos de acuerdo en algunas cosas. Para empezar, necesitamos algunos nombres. Vamos a llamar «cardinal de un conjunto» al número de elementos de ese conjunto. Por ejemplo, el cardinal del conjunto de mis dedos es 20, si cuento los de las manos y los de los pies. Hay conjuntos cuyo cardinal es infinito, como por ejemplo el conjunto de los números naturales. Otro nombre que vamos a usar es «subconjunto», que es el conjunto formado por unos cuantos elementos de un conjunto. No por todos, eh, el subconjunto de todos los elementos es el conjunto completo, y no vale como subconjunto (en realidad, lo que estoy diciendo en matemáticas se llama «subconjunto propio», pero ahora eso nos da igual). Otra cosa que necesitamos es la idea de una «correspondencia» entre los elementos de dos conjuntos. En concreto, en mates se llama biyección, pero no necesitamos palabras tan sofisticadas de momento. La cosa es que tenemos dos conjuntos y lo que queremos es emparejar sus elementos, uno a uno, cada uno del primer conjunto emparejado con uno del segundo. Por ejemplo, yo puedo emparejar el conjunto de los dedos de mis manos con el de los dedos de mis pies. Si puedo emparejar los elementos de dos conjuntos sin que sobre ningún elemento en ninguno de los conjuntos, será porque tienen el mismo cardinal, el mismo número de elementos, ¿no? Y si me sobra algún elemento en uno de los conjuntos, es porque el cardinal de ese conjunto es mayor que el del otro, o sea, que tiene más elementos. Si te has liado vuelve a leer, es culpa mía por no ser suficientemente claro. Te espero aquí hasta que lo tengas claro. ¿Ya? Seguimos.

Cantor decía que un conjunto es infinito, que su cardinal es infinito, si puede hacerse un emparejamiento entre el conjunto entero y alguno de sus subconjuntos (acuérdate de que el conjunto completo no cuenta como subconjunto). Y dirás: «Eso es imposible». ¿Cómo voy a poder emparejar cada elemento de un conjunto con los elementos de un subconjunto, si son menos? ¡Siempre me van a quedar algunos sin emparejar, no me fastidies! Pues aquí es donde el infinito hace de las suyas. Necesitamos un ejemplo.

Piensa en los números naturales: el 1, el 2, el 3, el 4, el 5... todos. TODOS. Y ahora piensa sólo en los números pares. Todos los números pares. Está claro que los pares son un subconjunto de los naturales. Todos los pares son naturales, pero hay algunos naturales que no son pares. ¿Adivinas cuáles? Pues sí, los impares, no te las des de Pitágoras tampoco, eh. En fin, que podemos emparejar de una forma muy sencilla los naturales con los pares, sin que sobre ninguno por ningún lado. Fíjate qué cosa más tonta: emparejamos el 1 con el 2, el 2 con el 4, el 3 con el 6... y así todo el rato. El entero n lo emparejamos con el $2n$. ¿Queda alguno sin emparejar? No, todos tienen su parejita. Así que, aunque te parezca flipante, hay tantos pares como naturales. Cosas del infinito. En realidad, el mismo argumento sirve para ver que hay tantos múltiplos de 3435 que naturales. Emparejamos el n con el $n \cdot 3435$ y listo.

Increíble, ¿no? Los conjuntos infinitos tienen estas cosas. Más increíble igual te parece saber que existen tantos enteros como racionales. Existe una forma de emparejar los naturales con los racionales, y no sobra ninguno por ningún lado. Muy fuerte. Bueno, pues a este infinito, como es el de los naturales, lo vamos a llamar el infinito de contar.

¿Qué pasa con los reales? También hay infinitos, eso está claro. ¿Los podemos emparejar con los naturales? Pues vamos a ver que no, que es imposible. O sea, que los reales son infinitos, pero más infinitos que los naturales o los racionales. El cardinal de los reales es estrictamente mayor que el de los naturales. Ahora puedes hacer dos cosas: creértelo o leer (y entender) la demostración. Mi recomendación es que hagas lo segundo. Es un ejemplo maravilloso de reducción al absurdo. Ya ves que los matemáticos tenemos algunas formas de razonar a las que recurrimos a menudo. Que veas eso es uno de los objetivos de este libro. La demostración se llama el «argumento de la diagonal de Cantor», y merece ser considerada una de las demostraciones más brillantes de las matemáticas, porque es un argumento sencillo (créeme, en matemáticas hay demostraciones muuuuucho más complicadas que ésta) que prueba un resultado muy profundo.

Para empezar, supongamos que podemos emparejar todos los reales con los naturales. Habrá uno que estará emparejado con el 1, otro que estará emparejado con el 2, otro que estará emparejado con el 3, etc. Pues vamos a construirnos un número real que no va a estar emparejado con ninguno, de donde resulta que nuestra suposición inicial no puede ser cierta, no pueden emparejarse los reales con los naturales.

El número que vamos a construir, que vamos a llamar R (de real, y con mayúscula para darle prestancia y majestad),

es un 0 seguido por un montón de decimales (infinitos si hace falta). En realidad, da igual que sea un 0 o cualquier otro número, lo que importan son los decimales. Nos fijamos en el número real que está emparejado con el 1. De ese número miramos su primer decimal, pongamos que es *d*, y a nuestro R le colocamos en el primer decimal OTRO diferente de *d*, el que sea, pero diferente. Ok, ahora vamos al que está emparejado con el 2, nos fijamos en su segundo decimal, llamémosle *d*2 y en el segundo lugar decimal de R ponemos otra cosa diferente a *d*2. Vamos al que está emparejado con el 3, y nos fijamos en su tercer decimal, y sí, has adivinado, en el tercer lugar decimal de R, ponemos un número diferente. Y así, recorremos todos los emparejamientos, construyendo R, que tendrá infinitos decimales, pero que está entre 0 y 1. Bueno, pues resulta que R no está emparejado con ningún natural. ¿Te das cuenta de por qué? Imagínate que estuviera emparejado con uno, el *n*. ¡Es imposible! Porque la cifra decimal *n*-ésima de R es diferente a la cifra decimal *n*-ésima del número emparejado con R. ¡Por eso lo hemos construido así! Así que, con este argumento más o menos sencillo (aunque si es la primera vez que lo ves tendrás que leerlo unas cuantas veces, probablemente mejor si te acompañas de papel y lápiz), Cantor demostró que el cardinal de los reales es mayor que el de los naturales. Y los dos son infinitos. Hay infinitos más grandes que otros.

Cantor acabó demostrando que existen infinitos cardinales infinitos diferentes (parece un trabalenguas). Pero eso es otra historia… ya has tenido bastante por ahora.

Ejercicio 1. Hay un número muy curioso, que tiene unas propiedades especiales. Se llama número de Champernowne, y consiste en el cero y la lista de todos los números naturales puestos uno detrás de otro como cifras decimales. O sea, es el 0,0123456789101112131415161718192021222324 …
¿Es racional el número de Champernowne?

5.
Del páncreas al Kamasutra: la enseñanza de las matemáticas

Estamos avanzando bastante, hemos conocido un poco cómo funciona nuestro matemático interior. Hemos visto ya algunos de los fundamentos de las matemáticas. Hemos comprobado su poder lógico y su magnífica utilidad. Y sin embargo, si miramos a nuestro alrededor, una de las mayores desgracias para la humanidad parece ser el tener que estudiar matemáticas de pequeños. En serio, hay muchísima gente que lo pasa fatal con ellas, y acaban generando una historia personal de frustración que no es nada sana. Es una pena, la verdad. Es cierto que hay alguna gente a la que le gustan las matemáticas del colegio o del instituto, que lo pasan más o menos bien estudiándolas y que les parecen estupendas. Pero no nos engañemos, no son muchas personas y además a veces les da un poco de vergüenza admitirlo en público para no parecer raros. Queda mucho mejor mostrar la propia ignorancia en temas matemáticos, parece mentira.

El caso es que resulta evidente que con la enseñanza de las matemáticas hay un problema. Y además da prácticamente igual a qué lugar del mundo acudas. Esto no es un problema de un país u otro, parece una crisis universal. ¿Por qué pasa esto? No lo tengo del todo claro, pero vamos a buscar algunas razones. Para empezar, en la mayoría de los sistemas educativos del mundo, las matemáticas tienen un lugar privilegiado, lo cual está estupendo, dicho sea de paso. Las matemáticas, la lengua y tal vez los idiomas parece que son las joyas de la corona de todo sistema educativo que se precie. Acumulan muchas horas lectivas y están presentes en todos los niveles. Y la verdad, no se qué pasará con la lengua o los idiomas, pero desde luego con las matemáticas, el hecho de ponerlas en ese nivel de prioridad no ayuda a que los alumnos se motiven con las mates ni mucho menos. Es seguramente la asignatura más odiada. Lo cual, a poco que se pare uno a pensar, hace mayor la dimensión de la tragedia: la asignatura a la que se da más prioridad en el sistema acaba siendo la más odiada. Vamos, como resultado de campaña de *marketing* no puede ser peor: el producto estrella es el que peor valoración tiene por los clientes.

Puestos a buscar culpables, lo fácil es echar la culpa a los profes de matemáticas. No voy a caer tan bajo. Bastante hacen la mayoría de ellos, y en muchos casos su trabajo es estupendo. Seguramente hay casos de todo tipo y hay profesores fatales, pero eso pasa también con otras materias. En realidad, las razones son muy variadas, incluyendo probablemente los métodos de enseñanza, puede ser. Pero

hay otras causas que influyen tanto o más. Hay algunos motivos intrínsecos a las matemáticas, que son, por decirlo de alguna forma, un saber acumulativo: si no sabes sumar es difícil aprender a multiplicar, y sin multiplicar y sumar nada de potencias, ni ecuaciones... Lo cual lo complica todo, porque si te empiezas a perder en un punto dado, eso lo vas arrastrando. Es difícil «saltarte» parte del temario y seguir después como si nada. Eso pasa menos en otras materias, aunque no es exclusivo de las matemáticas. Están también las dificultades que tienen algunas personas con el pensamiento abstracto, el contenido de los programas de matemáticas de los distintos niveles educativos... en fin, montones de cosas. El tipo de pensamiento y el esfuerzo que precisan las matemáticas es grande y no es sencillo de asimilar para algunas personas. Por otro lado, muchos de los conceptos y técnicas que se enseñan en matemáticas quedan, para la mayoría de los alumnos, circunscritos al ámbito escolar, no los vuelven a ver aparecer nunca en su vida. Y cuando esos contenidos y mecanismos les exigen un esfuerzo al que no están acostumbrados, pierden la motivación y se empiezan a acumular los efectos negativos. No digo que sea así para todo el mundo, pero es algo bastante extendido, y eso es una desgracia personal y colectiva. Finalmente, y como resultado de los problemas de la mayoría de la gente con las matemáticas escolares se producen dos efectos perversos: no les interesan y les hacen sentirse frustrados y tontos, lo cual es aún peor. Y no tendría por qué pasar eso, de verdad que no.

Yo lo que propongo es que al enseñar matemáticas pasemos de lo que podríamos llamar el paradigma «páncreas» al paradigma «Kamasutra». En realidad, les pongo ese nombre por llamar la atención; en cuanto aparece la palabra Kamasutra, le entra a la gente el interés, y a eso voy. Pero tampoco son nombres casuales, son una forma fácil de recordar lo que quiero decir.

Cuando el alumno medio está en casa delante de los deberes de mates, o en la clase de matemáticas en el instituto, y las cosas se ponen difíciles o aburridas, que a veces pasa, hay una pregunta que le asalta la cabeza: «¿Y yo para qué tengo que estudiar esta mierda?». No siempre se formula así, a veces se disfraza de: «¿Y esto para qué sirve?». Y la respuesta que en el mejor de los casos recibe es algo así como: «Las matemáticas son muy útiles. Hay muchas cosas que no podrías hacer sin las matemáticas, sin ellas la vida sería más difícil, están siendo beneficiosas para ti sin que lo notes...» y otros argumentos de ese estilo, que en rigor son absolutamente ciertos, no los voy a negar. Ésta es la justificación que usamos muchas veces para que dediquemos montones de horas a las matemáticas durante toda la vida escolar, y que hayan de resultarte interesantes e incluso divertidas. Pero bueno, si uno se para a pensar, lo mismo puede decirse del páncreas, ¿no?: «El páncreas es muy útil. Hay muchas cosas que no podrías hacer sin el páncreas, sin él la vida sería más difícil, está siendo beneficioso para ti sin que lo notes...». Y sin embargo, nadie vería razonable que le dedicásemos al páncreas un montón de horas en la escuela, o que nos tenga que resultar interesante y divertido.

Ojo, que no estoy diciendo que no haya que darle importancia a las matemáticas en la escuela, o que no sean interesantes, e incluso algunas cosas pueden ser apasionantes y divertidas. Lo que estoy diciendo es que este argumento tipo «páncreas» no es suficiente; por sí mismo no nos va a hacer ver la importancia de estudiar matemáticas. Ni siquiera justifica, para la mayoría de la gente, que estudiemos matemáticas tal y como lo hacemos hoy en día. Por supuesto que hay razones profundas para la diferencia de horas que dedicamos a las matemáticas y al páncreas en la escuela. El hecho de dar importancia a las matemáticas en la formación académica me parece estupendo. Lo que creo es que las razones que se esgrimen para justificar esto ante quien lo cuestiona son a veces demasiado pobres, y es en parte porque quienes las esgrimen no tienen otras mejores. Y las hay, claro que las hay. Pero antes vamos con el Kamasutra.

La mayoría de la gente sabe, o cree saber, lo que es el Kamasutra. La mayoría de la gente no ha leído ni una línea del Kamasutra. Y sin embargo, todo el mundo tiene la idea de que es un libro que enseña a disfrutar de ciertos placeres sabiendo más sobre ellos, de una manera que podríamos llamar «técnica». En realidad, el Kamasutra no es del todo así (lo he leído al documentarme para escribir estas páginas). Tiene una fama quizá excesiva, alimentada por versiones ciertamente muy atractivas. Pero eso ahora es lo de menos. Lo importante es que a mucha gente el Kamasutra les parece interesante, seductor y deseable sin siquiera haber leído una línea al respecto. ¿Y por qué no habría de ser así con las

matemáticas? Las matemáticas pueden permitirnos disfrutar de muchos aspectos de la vida que sin ellas no seríamos capaces de disfrutar, o al menos no del mismo modo. Hay aspectos de la realidad, de la naturaleza, de la sociedad... que podemos descubrir desde las matemáticas, y que sin ellas nos los estamos perdiendo. Este enfoque de la adquisición de conocimientos como vía para nuevas formas de admirar y gozar de la vida me parece muy interesante para todas las materias, pero de un modo especial para las matemáticas. Los sistemas de enseñanza deberían tener (y no digo que no lo tengan un poquito) como uno de sus objetivos fundamentales crear la conciencia de que «quien más sabe más disfruta». Eso es lo que quiero decir con eso del «paradigma Kamasutra», aunque sea una forma un poco pintoresca de hablar.

En lo que se refiere a las matemáticas, el objetivo de la enseñanza es que todos conozcamos a nuestro matemático interior, nos llevemos bien con él y tratemos de fortalecerlo. Los niños pequeños no tienen problema con eso, lo ven de un modo bastante natural y, dentro del aprendizaje que hacen a través del juego (que luego tristemente abandonamos demasiado pronto), las matemáticas constituyen una pieza más. La separación «afectiva» respecto a la asignatura de matemáticas se produce en la mayoría de los niños un poco después, hacia el final de la enseñanza primaria. Y después ya es difícil revertirlo.

En los planteamientos de la enseñanza de las matemáticas creo que el acento se pone en el fortalecimiento de nuestro matemático interior, y se deja un poco de lado lo de co-

nocerlo y llevarse bien con él. Muchos de los alumnos que luego llegan a la universidad a los estudios de ciencias saben más matemáticas que las que sabía Newton, pero no le encuentran sentido a lo que saben ni sienten demasiado apego por ello. Por ejemplo, hay gran parte de ellos que saben hacer derivadas, conocen muchas técnicas para derivar, pero no saben lo que es una derivada, por qué es importante ese concepto en las matemáticas y en sus aplicaciones, o que el camino histórico para llegar a él es apasionante y en él tuvo un papel fundamental el bueno de Newton, el de la manzana.

Si uno se mira los currículos de matemáticas de nuestro sistema de enseñanza, es decir, cuáles son los contenidos que se enseñan y por qué, encuentra que los fundamentos de la enseñanza de las matemáticas son básicamente tres (y esto es similar en muchas cosas a la mayoría de los demás sistemas, en esto se parecen casi todos bastante).

El primero de estos fundamentos es que las matemáticas tienen una utilidad práctica evidente (mi abuela lo explicaba diciendo: «Tú estudia las sumas para que no te engañen en la compra, hijo») y que generan una serie de habilidades transferibles a otras disciplinas, como por ejemplo el pensamiento abstracto. Esto ya lo pensaba Platón, que en un libro que escribió llamado *La República* desplegaba su idea de la enseñanza y otorgaba a las matemáticas un papel fundamental. Así que la cosa viene de lejos, al menos de tan lejos como Platón. Desde entonces, las sociedades han considerado importante que sus miembros adquieran un conjunto bastante amplio de conocimientos matemáticos que son potencialmente útiles para la vida en común. Algunos tienen un uso cotidiano evidente, como el concepto de número entero, o las operaciones aritméticas básicas. Otros son menos cotidianos pero también muy prácticos, como un conocimiento estadístico básico. Otros son potencialmente aplicables en distintos ámbitos y entrenan el pensamiento lógico y abstracto, como las ecuaciones y el álgebra que vemos en las escuelas e institutos.

El segundo fundamento para la enseñanza de las matemáticas es que las matemáticas son el lenguaje de las ciencias y la tecnología. Esta idea, aunque ha sido desarrollada por muchos, ya desde Galileo y antes, vamos a atribuírsela a Descartes. O al menos nos quedamos con que Descartes es un representante de esta idea. Vivimos en un mundo científico y tecnológico; muchos de los alumnos que pasan por las clases de primaria y secundaria van a acabar dedicándose a cosas relacionadas con la tecnología, la ciencia o la ingeniería. Así que mates para ellos, que las van a necesitar (y de paso, para todos los demás). Esto es cierto y está fenomenal. Pero plantea al menos un par de problemas. Por un lado, a veces da la sensación de que las matemáticas escolares, sobre todo las de secundaria, son algo así como «matemáticas para el futuro ingeniero». Sólo que no todo el mundo va a ser ingeniero. El peso que tienen las matemáticas instrumentales, lo que llamamos cálculo, trigonometría, análisis de funciones, las manipulaciones de polinomios, etc., denota un enfoque muy claro hacia quien va a usar las matemáticas como herramienta técnica. Y ésos son los ingenieros y los

científicos fundamentalmente. Así que por una parte estamos dando a todos los alumnos algo que quizá sólo debiéramos darle a algunos. Puede ser un problema pero no me parece grave. Oye, todo eso que se llevan aprendido, les vaya a ser útil profesionalmente o no. Si sólo enseñáramos las cosas útiles para la profesión de cada cual, la educación sería muy pobre. Yo veo más problemático el hecho de que a lo largo del periodo escolar las técnicas matemáticas aparecen demasiado alejadas de su contexto de aplicación (e incluso de su contexto dentro de las propias matemáticas). Aprendemos muchas técnicas pero no sabemos para qué ni por qué. Y eso, hoy en día, es mucho más importante que antes. Lo de «hoy en día» lo digo porque la parte mecánica de esas técnicas, incluso de las avanzadas, como el cálculo diferencial e integral, las podemos hacer, y en la práctica las hacemos, con ayuda de ordenadores y calculadoras. Antes no era así, y si no sabías derivar bien eras menos competente como ingeniero, porque tarde o temprano tendrías que ponerte, papel y boli, a calcular derivadas. Hoy ya no. Hoy esa parte podemos aligerarla y dedicar más tiempo a aprender qué es una derivada, por qué es importante y cuál es su lugar en el universo matemático. Ya que no es tan necesario aprender las técnicas mecánicas, podemos aprovechar la oportunidad para aprender mejor el sentido de las cosas. Que nuestro matemático interior crezca menos musculoso pero más hábil, porque sus tareas van a exigir menos esfuerzo «físico» que antes, hay máquinas que pueden trabajar por él. Exactamente lo mismo que pasa en el mundo en general.

Y finalmente, el tercer fundamento es evitar el anumerismo. Y esto, que es una idea algo más moderna, es también muy importante. Elijo como representante de esta parte a John Allen Paulos, que con su famoso libro *El hombre anumérico* puso nombre a esta realidad tan frecuente: la ignorancia de los mecanismos matemáticos que están presentes en la sociedad que nos rodea. Vivimos rodeados de razonamientos matemáticos, datos, estadísticas... y si no sabemos interpretarlos, manejarlos o siquiera entenderlos, nos encontramos en una especie de analfabetismo matemático: lo que Paulos llama «anumerismo». En realidad, no hacen falta conocimientos matemáticos demasiado avanzados, la mayoría de nuestros encuentros cotidianos con el mundo de las matemáticas tienen que ver con la probabilidad, la estadística o el ser capaces de manejarnos bien con aproximaciones numéricas. Tener una cierta familiaridad con los números nos evitaría tragarnos sin más datos aparecidos en portadas de periódicos como aquel estudio que afirmaba que en España hay 132 bares por persona. Éste es un ejemplo burdo que provenía de un error de cálculo, pero, claro, como aparece en la portada del periódico y pertenece a un estudio de una empresa de prestigio, mucha gente tiende a creérselo sin cuestionarlo. En el caso de los bares, la cosa provocó muchas bromas y enseguida se corrigió el error. Pero la cuestión de fondo es que tener un conocimiento más sólido de (al menos) los números, la probabilidad y la estadística nos haría más capaces de cuestionar las noticias y datos que leemos a la luz de la evidencia matemática. Nos haría menos

manipulables y sería más difícil engañarnos. Y eso es básico para la vida en sociedad. Nuestro matemático interior está ahí también para protegernos, para evitar que nos abrumen con datos engañosos y manipulen nuestra percepción de las cosas. Es nuestro aliado también para la vida en sociedad. La escuela nos prepara para esa vida en sociedad, y evitar el anumerismo es prepararnos para ser buenos ciudadanos. Es un objetivo loable pero aunque la escuela es consciente de ello, creo que no hace lo suficiente por cumplirlo. Y creo que la clave no está en enseñar más conceptos matemáticos, sino en contextualizar los que tenemos. Todas las semanas aparecen en la prensa noticias y se dan situaciones en nuestra vida que se analizan de modo más objetivo aplicando las matemáticas, sin tener que abocarnos a creer a tal o cual periodista o a tu cuñado, que sabe de todo. Varios ejemplos son las elecciones, los datos económicos, la lotería y los juegos de azar, la incidencia de enfermedades, la vacunación, los riesgos de volar en avión o de viajar en tren, los efectos de las migraciones y mil cosas más. Eso también son matemáticas, y aunque los sistemas escolares saben que tienen una tarea en ese sentido, con demasiada frecuencia la cumplen pobremente. Quizá porque tenemos que pasar demasiado tiempo aprendiendo nuevas técnicas.

En realidad, estos tres fundamentos de nuestros sistemas de enseñanza de las matemáticas tienen mucho sentido. A mí me parecen un planteamiento muy correcto y desde luego, si se llevan a cabo de manera adecuada, son algo a lo que cualquiera con dos dedos de frente no debería renunciar. Y sin

embargo, la cosa dista mucho de ser una historia feliz. Para mí la clave está en la forma como implementamos estos tres fundamentos en la realidad de los programas educativos y las aulas. Eso que decía del paradigma Kamasutra; este planteamiento de las matemáticas como herramienta e ingrediente para disfrutar más de la vida, a través del conocimiento, no está reñido con Platón, Descartes y Paulos. Al revés, puede ser un aliado de los tres. Los objetivos fundamentales, mostrar la utilidad de las matemáticas, las habilidades transferibles, el lenguaje de la ciencia y la lucha contra el anumerismo, pueden implementarse con unas matemáticas disfrutables, curiosas, interesantes, apasionantes incluso, que den ganas de saber más, porque se le encuentra sentido a adquirir más conocimiento y se disfruta haciéndolo.

Muchas veces pienso que si los profesores y las profesoras de lengua y literatura tuvieran que limitarse en sus clases a enseñar la sintaxis, la gramática, la fonética y la ortografía, y jamás pusieran a sus alumnos en contacto con la literatura, la poesía, el teatro, el cine…, esas asignaturas serían tan odiosas a sus alumnos como lo son las matemáticas para tantos de ellos. Y es que en las clases de matemáticas muchas veces aparecen sólo su gramática, su sintaxis, y toda la poesía, la literatura, que las matemáticas tienen (y es mucha) queda tristemente fuera de las aulas. Hay mucho por hacer, creo, pero lo que hay que hacer es muy bonito. Y sobre todo muy liberador para muchas personas a las que las matemáticas escolares les generan cierta frustración e incluso cierto complejo de fracaso e incapacidad. No tiene por qué ser así.

Este capítulo no tiene ejercicios. Es una excepción. No pongo ejercicios porque como es un capítulo sobre la escuela, la enseñanza y todo eso, igual te da la impresión de que estoy poniéndote deberes o un examen. Pero quiero terminar con un ejemplo de matemáticas asociadas con el entretenimiento. ¿Has jugado alguna vez al Monopoly? Seguramente sí, es uno de los juegos de mesa más populares que existen. Por cierto, que el Monopoly fue inventado por una mujer, Lizzie Magie, un dato que no mucha gente conoce. A lo que iba, ¿qué tiene que ver el Monopoly con las matemáticas? Como en tantas cosas en la vida, saber matemáticas y saber aplicarlas puede colocarte en una posición de ventaja, hacer mejor lo que tienes que hacer. Te cuento sólo una cosita. Estás jugando al Monopoly, ¿hay alguna propiedad que convenga comprar más que otras? ¿Qué dicen las matemáticas sobre eso? En el Monopoly, hay una casilla que es la más visitada de todas, todos los jugadores pasan por ella más o menos cada cinco o seis tiradas. Se trata de la cárcel. Y cuando salen de la cárcel, ¿a dónde van? Cuando se les permite salir de la cárcel los jugadores tiran los dos dados y van a la casilla que les toque: ¿son todas las casillas igual de probables? No. Incluso aunque los dados sean perfectos y cada cara tenga la misma probabilidad de salir, fíjate en una cosa: la tirada puede estar entre 2 (doble 1) y 12 (doble 6). Pero mientras que el 2 sólo se puede sacar con dos unos, otras puntuaciones, como el 7, se pueden sacar de varias formas: un 3 y un 4, un 1 y un 6, un 2 y un 5. De hecho, con dos dados la tirada más probable es un 7, que sale un 16,7 % de

las veces (el cálculo de probabilidades de los dos dados es sencillo pero un poco extenso para explicarlo aquí). Las menos probables son el 2 y el 12, que salen sólo un 2,78 % de las veces cada una de ellas. Las tiradas más probables después del 7 son el 6 y el 8. Así que si uno tiene en propiedad las casillas que están a 6, 7 u 8 lugares de distancia de la cárcel, tendrá frecuentes visitas del resto de jugadores. Es sólo el comienzo. Por fortuna, el Monopoly tiene un montón de elementos extra, como tarjetas de suerte que te llevan a una u otra casilla en concreto y que hacen del juego algo más difícil y por tanto más entretenido de modelizar. Se puede estudiar también la rentabilidad de las propiedades con o sin casas y hoteles. Hay estudios, nada complejos y muy comprensibles, de cómo aprovechar todos estos datos para jugar con más garantías al Monopoly. Y sí, eso también son matemáticas.

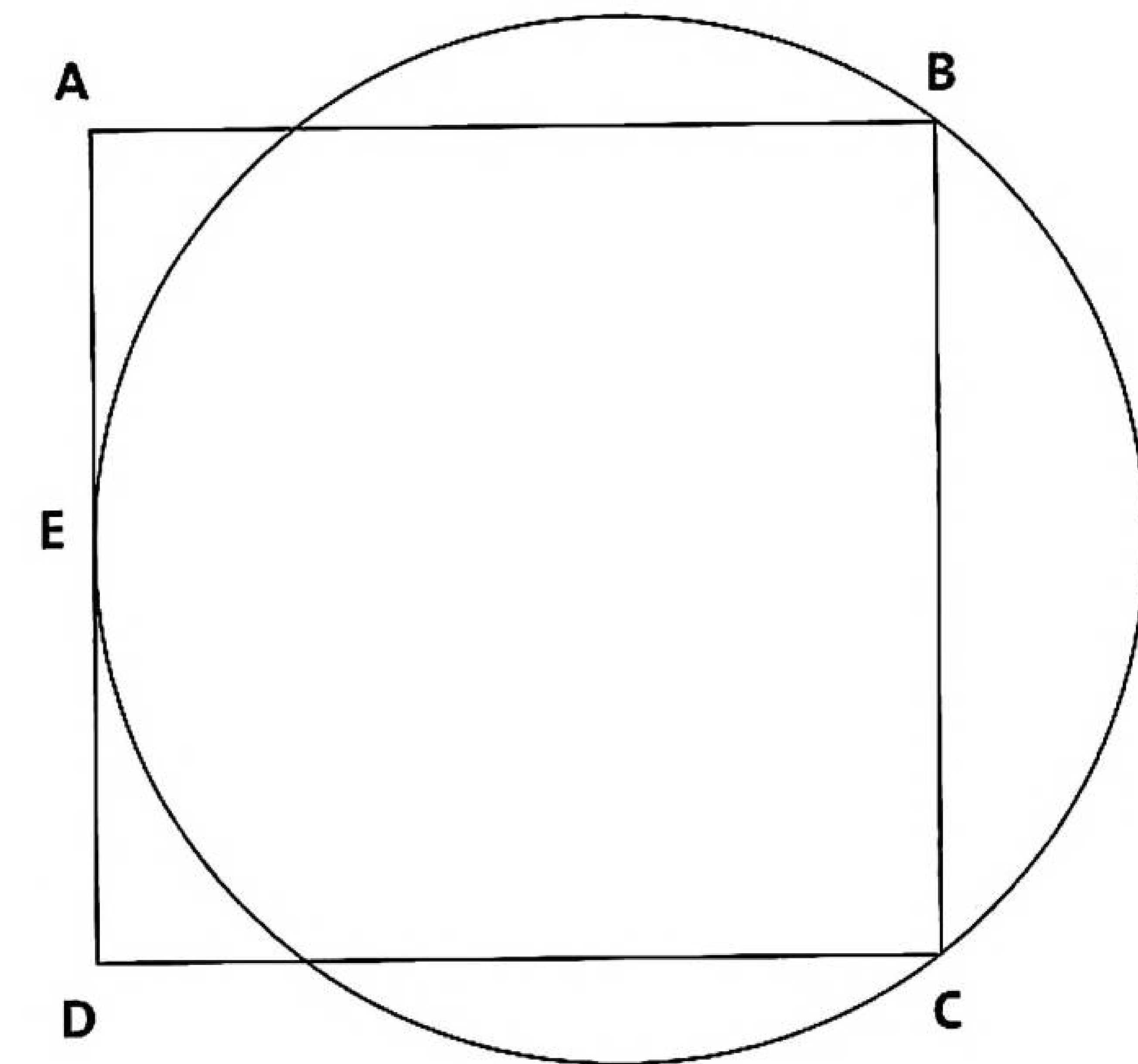
6.
El problema de las diferentes inteligencias matemáticas

Éste es un libro sobre inteligencia matemática. Pero para ser sinceros, es mejor hablar de inteligencias matemáticas. A ver si vamos a ser menos que el de la teoría de las inteligencias múltiples. Incluso restringiéndonos al ámbito de las matemáticas, también podemos hablar de inteligencias múltiples o al menos de diferentes formas de aplicar la inteligencia matemática. Hay modos diferentes de pensar en matemáticas. Las matemáticas, como vas a ir dándote cuenta, si es que no lo sabías ya, no van de «hacer cuentas muy bien». Eso se llama capacidad de cálculo y en realidad poco tiene de inteligencia: las calculadoras y los ordenadores lo hacen mucho mejor que nosotros, son procedimientos meramente mecánicos. En matemáticas, lo realmente importante es la capacidad de encontrar patrones, de generalizar procedimientos o cadenas lógicas de pensamiento, saber utilizar adecuadamente los resultados más sencillos para llegar a conclusiones más complejas. Y esto se hace de forma diferente en geometría que en análisis matemático, en álgebra que en estadística... Incluso diferentes matemáticos tienen formas distintas de resolver el mismo problema. Y de eso te quiero hablar en este capítulo.

Tristemente, la gente tiende a pensar que, dado un problema, hay que encontrar la solución, la única solución, y del único modo posible. Pero por suerte las cosas son mucho más interesantes. Voy a contarte un experimento que llevé a cabo en el sitio donde trabajo, el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja, y que me sirve muy bien para ilustrar todo esto que te digo.

Un buen día, creo que era por la mañana, puse en los tablones de anuncios de mi departamento una hoja con el dibujo que aparece en la figura 1.

Figura 1: Un problema geométrico.



Sobre esa figura pregunté: ¿qué es mayor, la circunferencia o el perímetro del cuadrado? Y pedí a quien lo resolviera que me entregara escrita la solución.

El problema es bonito, más o menos sencillo de resolver (sobre todo si estamos hablando de matemáticos profesionales) y permite ser atacado de formas diferentes. Por desgracia no me lo he inventado yo, una pena. Es un problema relativamente conocido, pero me servía perfectamente para el propósito de descubrir distintas formas de pensar en matemáticas, distintas expresiones de inteligencia matemática. Ahora te cuento los resultados que obtuve. Pero antes para un poco, no sigas adelante y piensa en el problema. Coge papel y boli, y trata de resolverlo. Hasta ahora hemos visto problema lógicos y de números, vamos a por uno de geometría. Éste será el «ejercicio cero» de este capítulo. De verdad, no te precipites, tenemos tiempo, luego puedes seguir leyendo si quieres, pero vas a disfrutar mucho más de lo que sigue si has intentado resolver el problema, o si incluso lo has conseguido. Por supuesto, las posibles respuestas son sólo tres: el cuadrado es más grande, la circunferencia es más grande o los dos son iguales. Pero estamos en matemáticas, esto no es un test, así que lo importante es el razonamiento; sólo una de las tres respuestas es correcta, ¿cómo demostrarla?

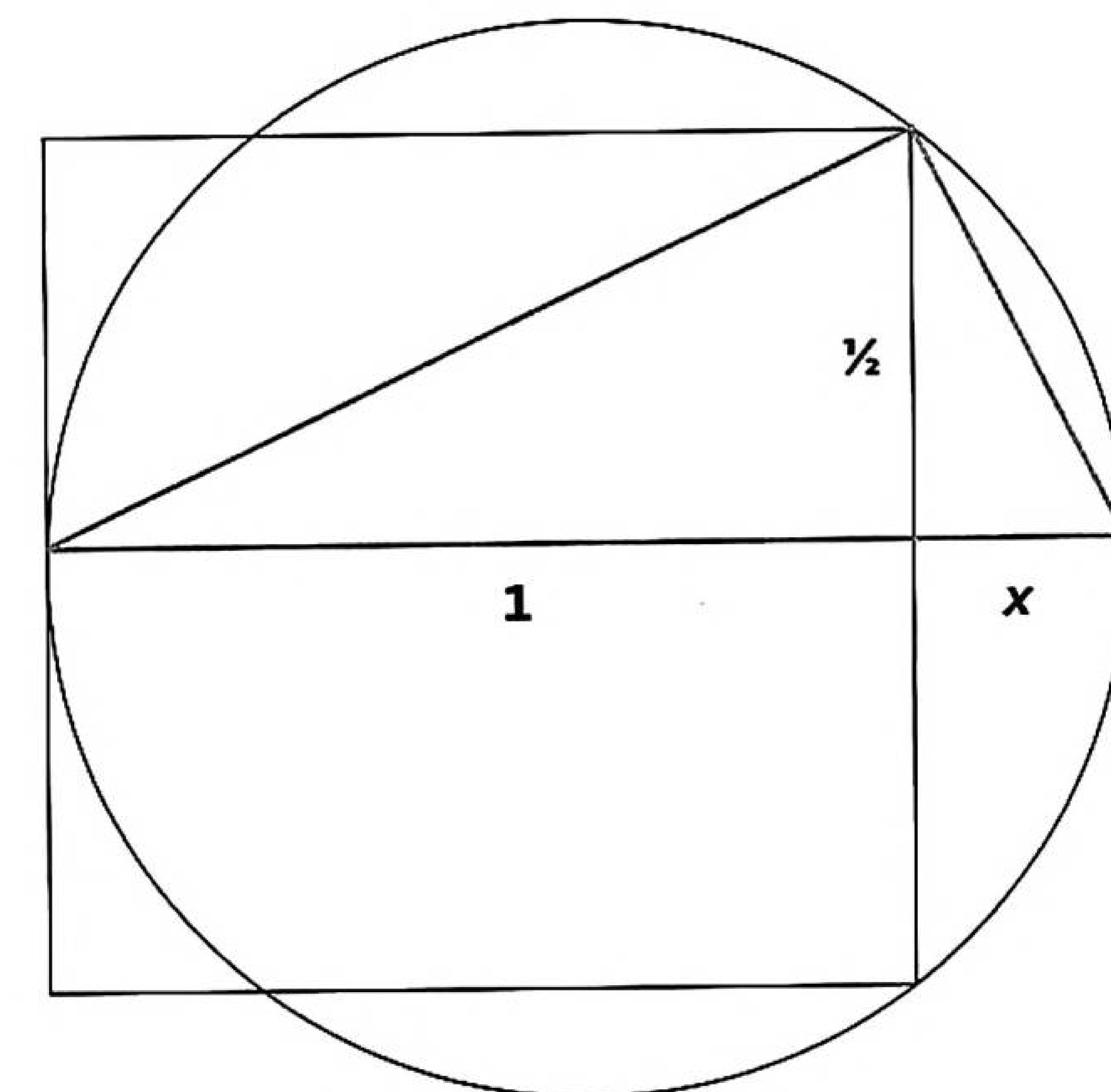
Recibí unas veinte soluciones, no sólo de profesores, sino también de alumnos, todas correctas, por supuesto. Algunas muy similares entre sí, pero resultó que había soluciones diferentes. No sé si has conseguido resolverlo por tu cuenta. Si ni siquiera lo has intentado, detente ahora mismo e

inténtalo, aunque sea un ratito, a ver qué puedes ver en las relaciones entre ese cuadrado y esa circunferencia. No voy a comentar todas las soluciones que me llegaron, sólo tres, para ver qué podemos extraer sobre la forma de pensar de los matemáticos y las diferentes inteligencias matemáticas. Nos permitirá acercarnos un poquito a los puntos en común y a las diferencias, para poder definir mejor quién es ese matemático interior que tenemos dentro, qué cosas hace.

Ésta fue una de las soluciones; la pongo más o menos como me la enviaron y trato de explicarla un poco:

Supongamos que el lado del cuadrado mide 1. No pasa nada por esto, el argumento es igualmente válido, ya verás. Dibujamos un triángulo auxiliar como en la figura 2.

Figura 2: Diagrama para la primera solución.



El triángulo tiene las siguientes características: la base mide $1+x$, la altura mide ½ y es un triángulo rectángulo. ¿Tienes claro que estas tres cosas son así? Que la base es $1+x$ es fácil de ver, ¿no? La parte que va desde el vértice de la izquierda hasta cruzarse con el lado del cuadrado es como un lado, y a lo que le falta hasta llegar al vértice de la derecha le llamamos x. Que la altura es ½ está claro también, porque es medio lado. ¿Y lo de que es rectángulo? Te lo dejo para que lo pienses. En las páginas de soluciones lo podrás encontrar, si es que no te sale una razón para ello. Es el ejercicio 1 de este capítulo.

Bueno, sigamos con la solución que me envió este profe. Ya tenemos el triángulo rectángulo. Y se sabe que en todo triángulo, la altura es media proporcional entre los dos segmentos que determina en la base. No te agobies por ese «se sabe»; al decir eso este profe no quiere decir «todo el mundo lo sabe», sino que está demostrado y él lo sabe. En este caso, eso significa que 1(uno de los segmentos) dividido por ½ (la altura) es igual que ½ (la altura) dividido por x (el otro segmento). De ahí sacamos que x es igual a ¼, o sea, que el diámetro de la circunferencia es $5/4$, porque $1+x$ es entonces $1+1/4$ que da $5/4$. Bueno, pues ahora, sabiendo que la circunferencia es π por el diámetro, tenemos que mide $5\pi/4$, y el perímetro del cuadrado es 4. ¿Qué es más grande? Pues 4; haz las cuentas y verás que es equivalente a que 16 es mayor que 5π, o sea, que π ha de ser menor que $16/5$, que es 3,2, efectivamente, mayor que π.

Fíjate en los ingredientes de esta solución:

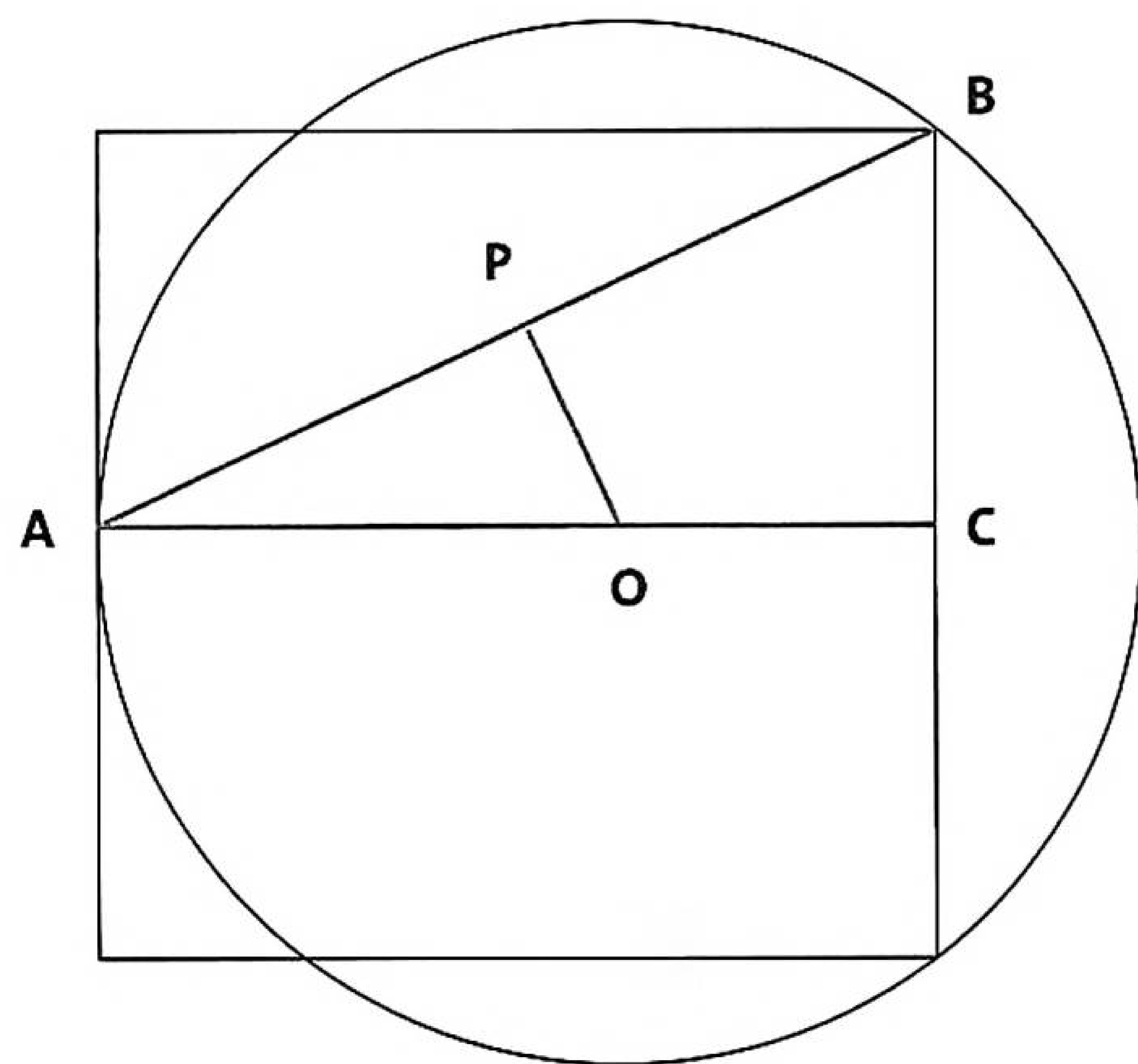
- Inventarse el triángulo auxiliar.
- Saber que la altura es media proporcional entre los segmentos que determina en la base.
- Saber calcular la longitud de la circunferencia conociendo el diámetro.
- Saber calcular el perímetro del cuadrado conociendo el lado.
- Saber que π es menor que 3,2.
- Hacer las manipulaciones de números para ver que $5\pi/4$ es menor que 4.

Algunas de estas cosas son más o menos conocidas por todo el mundo (la longitud de la circunferencia, el perímetro del cuadrado, que π es menor que 3,2). Otras son mera técnica (las manipulaciones para saber que $5\pi/4$ es menor que 4, o que $1+x$ es $5/4$). Otras son cosas que no todo el mundo sabe, que son parte del bagaje matemático aprendido por la persona en cuestión, como lo de la media proporcional de la altura. En fin, que para que se te ocurra esta solución tienes que tener cierta formación matemática. Esto no se le ocurre a cualquiera.

Otra de las soluciones que me llegaron planteaba la figura 3 (fíjate que el triángulo es distinto), y suponía que el lado del cuadrado mide 1. De nuevo no pasa nada por eso, el argumento es totalmente correcto.

Esta persona razonaba así: tomamos el punto medio de AB, y lo llamamos P. Y al centro de la circunferencia lo llamamos O. Entonces, los triángulos ABC y AOP son semejantes. ¿Por qué es eso? ¿Sabrías decirlo? Si quieres piénsalo, y si no, ve directamente a las soluciones; éste es el ejercicio

Figura 3: Otra de las soluciones al problema.



número 2 de este capítulo. Bueno, pues entonces tenemos, que al ser semejantes, AB/OA=AC/AP y tenemos que AC=1 y como BC es ½, entonces (aplicando el teorema de Pitágoras) AB es $\frac{\sqrt{5}}{2}$ y AP es la mitad de eso, o sea, $\frac{\sqrt{5}}{4}$, y además, OA es el radio (lo llamamos R). Sustituimos los valores y tenemos que R=5/8. Ahora, con la fórmula de la circunferencia, que es $2\pi R$, y el perímetro del cuadrado tenemos, como antes, que el perímetro es 4 y la circunferencia $5\pi/4$. Fíjate de nuevo en los ingredientes de esta otra demostración:

- Inventarse el triángulo auxiliar.
- Demostrar que los dos triángulos son semejantes.
- Aplicar las relaciones que se dan entre triángulos semejantes.

- Aplicar el teorema de Pitágoras.
- Saber calcular la longitud de la circunferencia conociendo el diámetro.
- Saber calcular el perímetro del cuadrado conociendo el lado.
- Saber que π es menor que 3,2.

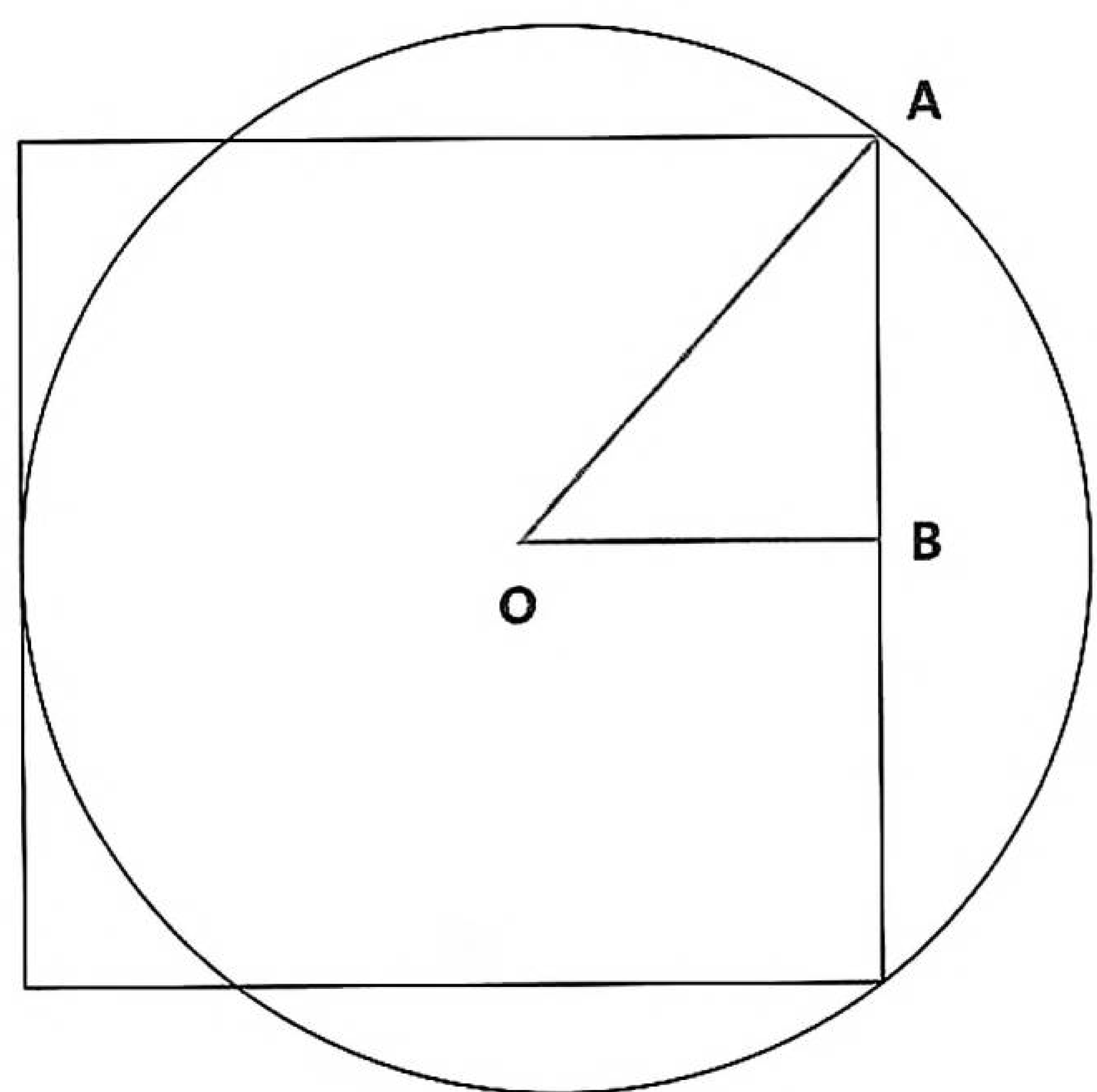
De nuevo hay cosas que podemos considerar conocimiento común, otras cosas que forman parte del bagaje matemático de la persona en cuestión y otras cosas que se le han ocurrido a él.

O sea, que tenemos en ambos casos una combinación de creatividad, técnica (sencilla en este caso) y conocimiento de resultados que se sabe que son ciertos (lo de la altura y los segmentos). La técnica y el uso de resultados previos dependen de la formación que uno tenga. La parte creativa, inventiva, es algo más personal, y ahí sí que podemos hablar de formas distintas de pensar. Incluso en un problema sencillo como éste.

A continuación, te pongo la forma en la que yo resolví este problema. Lo que hice fue imaginar una línea desde el centro del círculo a una esquina del cuadrado de las que están sobre la circunferencia, y otra desde ese mismo centro, horizontalmente hasta el punto medio del lado. Supongo que el lado del cuadrado es 1. Es la figura 4.

Vale, entonces tenemos que OAB es un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa es el radio (que lo voy a llamar R) y uno de los catetos mide ½. El otro cateto, OB, no sé lo

Figura 4: Otra solución para el problema.



que mide, y lo voy a calcular para poder sacar de ahí lo que mide R. Por el teorema de Pitágoras tengo que $R^2=OB^2+¼$ (porque ¼ es ½ al cuadrado). Ahora fíjate que si sumo OB más el radio obtengo el lado del cuadrado, que vale 1. ¿Te das cuenta? Mira la figura para que lo veas. O sea, que OB es 1 menos el radio, es decir, 1-R. Vale, pues ya está: $R^2=(1-R)^2+¼$. Como $(1-R)^2$ es igual a $1-2R+R^2$, de ahí tengo que $R^2=1-2R+R^2+¼$, paso 2R a la izquierda (que como en la derecha estaba restando pasa sumando), los R^2 los puedo restar a cada lado así que se cancelan mutuamente, y sumo 1 y ¼, con lo que tengo que R es ⅝. El lado es, pues, 4 y la circunferencia, $5\pi/4$. Y acabo como en las soluciones anteriores.

Fíjate que esta solución tiene los mismos ingredientes que las anteriores, aunque quizá más elementales. Un poquito de

creatividad para hacer el triángulo, utiliza el conocimiento del teorema de Pitágoras, que es uno de los más populares en las matemáticas de todo el mundo, y utiliza manipulaciones algebraicas básicas.

En algún sentido, la tercera solución es más básica, porque utiliza conocimientos que son más populares, pero eso es sólo porque el teorema de Pitágoras es más conocido que la semejanza de triángulos o que el hecho de que la altura de un triángulo sea media proporcional de los segmentos que forma. Pero ¿eso es una cuestión histórica, cultural o matemática? ¿De verdad, el teorema de Pitágoras es «objetivamente», «matemáticamente», más sencillo que los otros dos? Seguramente no, así que estas soluciones son bastante equivalentes desde ese punto de vista, aunque puedan parecerte lo contrario. Me llegaron también otras soluciones más complicadas matemáticamente, porque utilizaban conceptos matemáticos más sofisticados que aquí no tengo espacio para contártelos. Había soluciones basadas en números complejos, en geometría analítica… todo un alarde de creatividad, la verdad. Fue muy interesante ver cómo pensaban mis compañeros en torno al mismo problema.

Como ves, hay una multiplicidad de formas de atacar un mismo problema, aunque sea tan sencillo como éste. No te digo nada de cuestiones matemáticas más difíciles. Hay decenas de formas, por ejemplo, de demostrar que hay infinitos números primos. Pero siempre podemos ver algunos elementos comunes.

En primer lugar está la creatividad, que normalmente (a este nivel de resolver problemas más o menos sencillos) va dirigida a colocar el problema en relación con lo que ya sabemos de matemáticas, ya sea mediante una conjetura creativa, que iremos probando para ver si nos acercamos a la solución del problema (esto se hace mucho en teoría de números o en álgebra), o bien utilizando elementos auxiliares como los triángulos que hemos visto en nuestro problema. Estos elementos auxiliares nos ayudan a descubrir relaciones entre los elementos del problema, relaciones que de primeras no estaban (más exactamente, no nos dábamos cuenta de que estaban) y que son las que nos harán llegar a la solución. La educación matemática pone mucho énfasis en entrenar esta creatividad; es algo complicado porque es difícil de clasificar e identificar. De modo que el entrenamiento muchas veces consiste en hacer muchos problemas y ver las soluciones que otros dan a problemas que nos planteamos. Es parecido al ajedrez, donde uno aprende jugando mucho y viendo muchas partidas, soluciones a problemas cada vez más complejos, de modo que uno se va acostumbrando a ponerse en situación de resolver problemas, e identifica estrategias, propias y de otros.

El segundo elemento común sería el bagaje matemático, la lista de resultados que conozco, mi cultura matemática, esa colección de propiedades que sé que están demostradas, y de las que puedo hacer depender la nueva propiedad que estoy buscando. En el caso de la tercera solución al problema del cuadrado y la circunferencia, el hecho de ser mayor

el perímetro del cuadrado se hace depender del teorema de Pitágoras. Hemos buscado terreno seguro, ya recorrido, y lo hemos encontrado. Es como crear un caminito desde nuestra casa (la solución del problema) a la carretera principal hacia la verdad (el conjunto de resultados ya probados de la matemática), una vez encontrado el camino, ya podemos ir donde queramos mientras nos mantengamos en la carretera.

Y finalmente el tercer elemento que hemos visto es la técnica. La manipulación algebraica, la resolución de ecuaciones, etc. En rigor, es como una versión del elemento anterior, sólo que son resultados tan pequeñitos que se nos hacen meras manipulaciones técnicas, como eso de pasar algo que está restando en el lado izquierdo de una ecuación a sumar en el lado derecho. Hay gente más hábil en esto, más entrenada, y que sabe llevar el camino de estas manipulaciones hasta colocar las cosas en situación de poder verlas más claras y que los resultados que necesito para demostrar lo que quiero, para solucionar mi problema, aparezcan más claros ante mí. A veces me maravillo viendo a algunas personas haciendo manipulaciones trigonométricas que llevan a resultados que uno ni imagina al principio, usando senos, cosenos, tangentes y sus imbricadas relaciones.

Creo que no voy a contarte nada más del funcionamiento de la mente matemática. O mejor dicho, de los diversos funcionamientos de la mente matemática. Ya conoces lo suficiente a tu matemático interior. Por supuesto que si intimas con él y tienes contacto con los matemáticos, que tienen una relación tan intensa con él, podrás llegar a conocerlo más.

Pero para este libro, y de momento, es suficiente. Es hora de pasar a verle ayudándonos a disfrutar de las matemáticas, y a ver la realidad aprovechando su mirada matemática. En eso va a consistir la segunda parte del libro.

Antes, si te sientes con ganas, te dejo los ejercicios que han quedado pendientes. Entiendo que no te apetezca ahora y los quieras dejar para más tarde. Vuelve cuando quieras.

Ejercicio 1: Demuestra que el triángulo de la figura 2 es rectángulo.

Ejercicio 2: Demuestra que los triángulos de la figura 3 son semejantes.

SEGUNDA PARTE
De paseo con tu matemático interior

7. Domar la intuición

Las matemáticas, su abstracción y su generalidad tienen sentido por sí mismas, construyendo ese edificio lógico que es una de las construcciones colectivas más grandes de las que los humanos hemos sido capaces. Pero además las matemáticas y su rigor pueden hacer algo por nosotros que es mucho más útil de lo que parece a primera vista: nos permiten domar la intuición, llevarla por cauces constructivos y evitar sus trampas. Muchas cosas en nuestra vida normal, y también en el progreso científico, funcionan por intuición, que es una de las aliadas de la creatividad. Pero a veces la intuición nos hace ver como imposibles cosas que no lo son, o nos presenta como evidentes cosas que no son ni siquiera ciertas. Para evitar esas pequeñas traiciones tenemos el rigor de las matemáticas, que nos ayudan a aprovechar el impulso, a veces un poco ciego, de la creatividad y la intuición. Ésta es una de las primeras ventajas de tener un matemático interior, inflexible vigilante, que te dice cuándo las cosas no son como parecen a primera vista. Es

una buena costumbre volverse de vez en cuando a él para pedirle consejo.

Déjame que te ponga unos ejemplos. Unos problemas sencillos muy conocidos, que ilustran esto que quiero decirte y que nos permiten a los matemáticos tener conversación en las fiestas e incluso atraer por unos instantes el interés de otras personas hacia nuestra fascinante profesión. Y si nos gustara apostar, ganaríamos bastantes apuestas a esa gente que se deja llevar a lo loco por su intuición.

El primer ejemplo lo he titulado «Cumpleaños feliz». Imagínate que estamos en un grupo de, pongamos, 50 personas. Yo qué sé, en un campamento, por ejemplo. El primer día del campamento nos presentamos todos con nuestro nombre, y decimos también la fecha de cumpleaños, para poder felicitarnos los unos a los otros. Y ¡casualidad! Nos encontramos con que hay dos personas que cumplen años exactamente el mismo día. El grupo celebra esa curiosidad, porque es una cosa extraña que entre sólo 50 personas haya dos que cumplan exactamente el mismo día. ¡Si hay 365 días en el año! ¿Cuál es la probabilidad de que pase algo así, 50 entre 365? Eso es más o menos un 13 %. Todos sonríen sorprendidos ante la casualidad, todos menos esa chavalita a la que le gustan las mates, y que sabe que eso no es así, que es perfectamente normal que entre 50 personas haya dos al menos que cumplen años el mismo día. «Lo sorprendente sería que cada una de las 50 personas cumpliera años en un día diferente del año», dice ella repitiendo las palabras que le susurra su matemático interior.

¿Quién lleva razón, la chica que piensa que eso es algo normal o los alegres sorprendidos? Echemos las cuentas, que para eso están las matemáticas. Pongamos que el año tiene 365 días, y que más o menos la probabilidad de que una persona haya nacido en un día o en otro es la misma. Vamos a utilizar el viejo principio de que la probabilidad de un hecho aleatorio se obtiene dividiendo el número de casos «favorables» entre el número de casos «posibles». También utilizaremos el hecho de que la probabilidad de que una persona nazca un determinado día es independiente del hecho de que otra persona cualquiera nazca en otro día cualquiera. Eso hace que podamos multiplicar las probabilidades de esos dos hechos. Muy bien, ya tenemos nuestra situación matemática planteada, nuestras «hipótesis» de partida. Lo que vamos a hacer, porque es más sencillo, es calcular la probabilidad de que cada una de las 50 personas haya nacido en un día diferente. Lo que falte para el 100 % será la probabilidad de que haya algún cumpleaños repetido.

Vamos a empezar con una sola persona, y añadiremos gente calculando la probabilidad de que la persona que añadimos a la lista cumpla años en un día distinto a todas las ya introducidas en la lista. Como al introducir la primera persona no hay nadie en la lista, tenemos que el número de casos «favorables», es decir, los días que tenemos libres sin repetir ninguno, es 365 y el número de casos posibles, o sea, el número de días en que ha podido nacer esa persona, es, como es natural, 365. Así que la probabilidad de que en un conjunto de una sola persona todas hayan nacido en días di-

ferentes es 365/365=1, o sea, el 100 % Nada espectacular de momento, pero sigue leyendo. Metamos la segunda persona: el número de casos favorables es sólo 364. Claro, porque el día en que ha nacido la persona que ya está en la lista ha dejado de ser un caso favorable, porque entonces repetiríamos, y estamos calculando la probabilidad de que hayan nacido en días distintos. Los casos posibles, o sea, los días en que ha podido nacer esta segunda persona, siguen siendo 365, esto no cambia. Vale, calculemos la probabilidad, que es el producto de la probabilidad que nos daba la primera persona por la de la segunda, o sea: 365/365·364/365. Eso es 365·364 dividido entre 365·365, que da 0,997, o sea, que la probabilidad de que en un conjunto de dos personas las dos hayan nacido en días diferentes es del 99,7 %. Ya ves cómo va la cosa: al meter la tercera persona, sólo nos quedan 363 días favorables de 365 posibles; al meter la cuarta persona, nos quedan 362 favorables de 365 posibles... y así todo el rato. Como tenemos 50 personas, la probabilidad de que todas ellas hayan nacido en días diferentes es 365·364·363·...·316 dividido entre 365 cincuenta veces. Y eso da 0,03, un 3 %. Muy poquito. O sea, que la probabilidad de que en un grupo de 50 personas las 50 hayan nacido en día diferentes es del 3 %. Y por tanto, la de que haya algún cumpleaños repetido es del 97 %. Así que la chica (y las mates) llevaban razón en considerarlo algo normal. Lo contrario sí que habría sido excepcional: sólo pasa en tres de cada cien grupos de 50 personas que todas cumplan años en días diferentes.

Éste es un problema muy famoso, el problema del cumpleaños, y si es la primera vez que lo oyes es bastante sorprendente. La enseñanza de este problema es importante para el propósito de este libro: nos muestra que acercarse a la realidad con ojos matemáticos, con rigor, hace más difícil que nuestra intuición, o quien sea, nos engañe.

Más sorprendente quizá es este otro ejemplo, que a mí me encanta y que he titulado «Doblar papel». ¿Has intentado doblar alguna vez un papel por la mitad tantas veces como se pueda? Casi seguro que sí, todo el mundo lo ha intentado alguna vez, y siempre ocurre lo mismo: el papel se puede doblar siete veces y ya está. Después de siete veces es una cosa pequeña, dura y gorda que no se puede doblar más. Hay quien es muy hábil, y con mucho cuidado, doblando bien un papel fino, incluso ayudándose de unos alicates o de los dientes, logra doblarlo ocho veces. Concedámosles ese récord. ¿Es ocho un límite insalvable para la humanidad? ¿Una especie de maldición divina que nunca podremos superar? ¡No! ¡Todo menos rendirse! Toda buena historia tiene una heroína, y la de ésta se llama Britney Gallivan. La buena de Britney, a sus rebeldes 16 años, decidió que quería librarse de la tiranía de los 8 dobleces, que la humanidad debía sacudirse ese yugo. Acudió a un centro comercial, en el que compró un papel de baño muy finito (ya sabes a lo que me refiero) de 1.200 metros de longitud. Y con paciencia y cuidado se puso a doblarlo por la mitad, logrando un récord inhumano, una proeza que rompió los límites de lo posible: lo dobló 12 veces por la mitad. No sólo lo dobló, sino que hizo

un trabajo para el instituto estudiando la cantidad de material que formaba la curva de cada doblez, los límites de esa empresa, etc. Me emociono sólo de pensar en ella.

El montoncito de papel con 11 dobleces tiene una altura de más o menos 25 centímetros. Y eso me lleva a una pregunta curiosa. Imagínate que tuviéramos un papel tan largo como quisiéramos, y muy fino, pongamos de 0'01 mm de espesor (mucho más fino que el papel que usamos normalmente en las fotocopiadoras e impresoras). Supongamos que lo pudiéramos doblar 54 veces por la mitad: ¿qué altura tendría después de esos 54 dobleces? Imagínatelo, ¿tendría una altura como la de una persona de un metro ochenta? ¿Sería más alto que el techo de mi habitación, de dos metros y medio? ¿Más que un edificio de 7 pisos (unos 30 metros)? Piensa un poco: ¿qué te imaginas? Si quieres el dato real, te lo doy: resulta que un papel de 0,01 mm de grosor doblado 54 veces cubriría la distancia de la Tierra al Sol. ¡¿Qué?! Es broma, ¿no? ¿De la Tierra al Sol? ¡Eso es imposible! Bueno, sí, la intuición te dice que eso no puede ser. Pero somos matemáticos, echemos las cuentas y comprobémoslo. Tu matemático interior ya está sonriendo y frotándose las manos.

Estarás de acuerdo conmigo en que cuando doblamos el papel una vez, el grosor del montoncito se duplica, es decir, que tras el primer doblez tenemos un grosor de $2 \cdot 0{,}01$ mm, o sea, 0,02 mm. Y si volvemos a doblar, tras el segundo doblez el grosor vuelve a duplicarse, así que ahora tenemos 0,04 mm, o sea, $2 \cdot 2 \cdot 0{,}01$ mm. Tras cada doblez el grosor siempre se duplica. Atención ahora, piénsalo un poco si te

hace falta, pero estarás de acuerdo conmigo en que tras n dobleces tendremos 2 multiplicado por sí mismo *n* veces, y multiplicado después por 0,01 mm. En concreto, al doblar 54 veces tenemos un grosor de 54 doses multiplicados, y el resultado multiplicado por 0,01 mm. En lenguaje matemático diremos que el grosor total es $2^{54} \cdot 0{,}01$ mm. Bueno, pues veamos cuánto es eso. Resulta que 2^{54} es más o menos igual a $1{,}8 \cdot 10^{16}$, que quiere decir un 1, un 8 y quince ceros detrás. Y eso, multiplicado por 0,01 mm. Para pasarlo a milímetros, quitamos los dos lugares decimales detrás de la coma, que equivale a quitar dos de los ceros, así que nos queda un 1, un 8 y trece ceros detrás. Como hay mil milímetros en cada metro, para pasar a metros quitamos otros tres ceros, así que de los trece, nos quedan diez. Y para pasar a kilómetros, como en cada kilómetro hay mil metros, quitamos otros tres ceros, y nos quedan siete. Un 1, un 8 y siete ceros detrás. Eso son 180.000.000 de kilómetros, ciento ochenta millones de kilómetros. Y la distancia de la Tierra al Sol son unos 150.000.000 de kilómetros, o sea, que nos sobran 30 millones de kilómetros de papel. Casi nada. ¿Qué están haciendo los de la NASA con el dinero? ¡Que se dejen de naves carísimas que gastan mucho combustible y se pongan a doblar papel y podrán llegar al Sol! Bueno, en realidad, esto nos hace ver que no hay papel en la Tierra que se pueda doblar 54 veces (ya Britney lo había calculado).

El ejemplo del papel nos hace ver de nuevo que echar las cuentas nos permite zafarnos de las trampas de la intuición. Parece evidente que doblando un papel tan fino sólo

54 veces jamás podríamos cubrir una distancia tan grande y tan difícil de imaginar. Es el poder de los números, de las matemáticas, que nos enseñan a no fiarnos de nuestras intuiciones, de lo que «parece evidente». Hacer cálculos y razonamientos rigurosos nos permite evitar incluso el autoengaño, que a veces tan difícil es de detectar siquiera.

No quiero que te quedes con la idea de que la única forma de domar la intuición es hacer las cuentas, por muy potente que sea eso, como hemos visto al aplicar el cálculo simple de probabilidades al problema de los cumpleaños, o la potencia de las exponenciales (lo de elevar el dos a otro número) con el problema de doblar el papel (este problema es conocido en el frikimundo matemático como «el problema de la sábana»).

Vamos a poner otro ejemplo en el que interviene la combinatoria, las probabilidades y, sobre todo, el razonamiento lógico. Monty Hall (que en el momento de escribir estas líneas tiene 94 años) era el presentador de un famoso concurso televisivo en Estados Unidos llamado *Let's make a deal*. En ese programa, los concursantes iban eligiendo puertas detrás de las cuales había premios buenos o malos, y haciendo cambios de regalos. En 1975, un estadístico llamado Steve Selvin propuso, en la sección de «cartas al director» de la revista *The American Statistician*, un problema que ahora es mundialmente conocido como el «problema de Monty Hall». Si haces una búsqueda en internet verás la cantidad de páginas, vídeos, diagramas, etc., que hay explicando esto, es ciertamente famoso.

El problema tiene vagamente que ver con el programa de Monty Hall, y la situación que plantea es la siguiente: supongamos que Monty Hall, el presentador del programa, ofrece al concursante tres cajas, dos de las cuales están vacías y una que contiene las llaves de un coche (un Lincoln Continental del 75, nada menos). El concursante elige una de las cajas, y Monty Hall le ofrece dinero en lugar de abrir la caja. Y así, entre negociaciones, pasan un rato al cabo del cual Monty Hall (que sabe en qué caja están las llaves del coche) decide abrir una de las cajas que el concursante no ha elegido, y que está vacía. Y entonces plantea al concursante la pregunta definitiva: «¿Te quedas con la caja que elegiste al principio o prefieres cambiar de caja?». Suena la música, emoción entre el público y el concursante se queda indeciso. Lo que Steve Selvin planteaba en el problema era si el concursante tenía más probabilidades de llevarse el coche quedándose con la caja que había elegido desde el principio o si era ventajoso cambiarse de caja. O si al final, como sólo quedan dos cajas, las probabilidades de acertar son del 50 % y da igual lo que hagas (en términos de probabilidad). ¿Qué crees? Ésta es un pregunta que genera mucha controversia, y aunque matemáticamente la respuesta es clara y definitiva, hay quien se resiste a creérselo, como si hubiera algo que creerse aquí. Intentaré explicarlo con claridad. Pese a lo que pueda parecer, la respuesta es que es conveniente cambiarse de caja, las probabilidades no están al 50 %. En concreto, si te cambias de caja tienes ⅔ de probabilidades de llevarte las llaves, es decir, casi un 67 %. Mientras que si

te quedas con la caja que elegiste al principio, sólo tienes ⅓, o sea, un 33 % más o menos, de probabilidades de acertar. Es verdad que es una cuestión de probabilidades, eh; nadie te asegura que te vas a llevar las llaves, pero vamos, que sí, que es el doble de probable si te cambias de caja. Eso quiere decir que si todo el mundo, automáticamente, sin pensar, se cambiara de caja, dos de cada tres concursantes se llevaría el coche. Y cuanto más grande fuera el número de concursantes más cerca de ⅔ estaría la proporción de los que se llevan el coche. Una ruina para el programa, vamos.

¿Por qué es esto? Vamos a tratar de analizarlo. Piensa que al principio, cuando eliges tu caja, tienes ⅓ de probabilidades de haber acertado, ¿no? Y, por tanto, ⅔ de haber fallado. Ahora Monty Hall abre una caja que él sabe que no contiene el premio (esto es importante). ¿Cuáles eran tus probabilidades de haber acertado a la primera?: ⅓. Y sigue siendo así, sigues teniendo ⅓ de haber acertado a la primera, así que cámbiate, porque es más probable que hayas fallado a la primera, y que las llaves estén en la otra caja, que ahora acumula el ⅔, porque es la que tiene las llaves si fallaste en tu primera elección. Igual es más claro que lo pienses con 100 cajas. Eliges una, y claro, es muy difícil que hayas acertado a la primera. Va Monty Hall, que sabe dónde están las llaves, y abre 98 cajas en las que no están. ¿En serio crees que acertaste a la primera y te mantienes con la caja del principio? Es muy arriesgado, tienes un 99 % de probabilidades de fallar.

En este caso, la intuición de mucha gente es terca y no se deja convencer fácilmente por los argumentos rigurosos.

Hay gente que lo ve más claro si enumera las posibles situaciones, quizá eres uno de ellos. Mira, llamemos 1, 2 y 3 a las cajas. Y ponemos una P en la que tiene el premio, y una N en las que no tienen nada. La situación puede ser cualquiera de estas tres:

CAJA 1	CAJA 2	CAJA 3
P	N	N
N	P	N
N	N	P

Tú eliges una caja, la que sea, pongamos que es la Caja 1. Da igual, las cosas salen igual si prefieres que imaginemos que eliges la Caja 2 o la 3.

Bueno, tú has elegido la Caja 1, y Monty Hall sabe dónde está el premio. Si estamos en la primera situación (la primera fila), Monty abre cualquiera de las otras dos cajas, da igual cuál sea. Si estamos en la segunda situación, sólo puede abrir la 3, que no tiene nada. Y si estamos en la tercera situación, sólo puede abrir la 2. Ahora te pregunta si cambias o no. Si las cosas están en la primera situación y te cambias, pierdes, no te llevas nada. Si las cosas están como en la segunda o la tercera situación, cambiándote ganas el coche. Así que ganas en 2 de las 3 situaciones (da igual qué caja hayamos supuesto que eliges, haz la prueba si quieres). Y si te quedas con tu cajita de siempre, pierdes en 2 de las 3 situaciones.

Es una cuestión de razonamiento. En los juegos y situaciones que no son de puro azar, donde hay espacio para el ra-

zonamiento, tener algo de matemático te coloca en situación de ventaja. Seguir un razonamiento lógico ayuda a ganar, a hacer bien lo que estés haciendo, a resolver favorablemente la situación. Y hay muchas situaciones de ésas, personales, profesionales, etc. ¿Te acuerdas de lo que hablábamos hace unas páginas sobre la generalización y la abstracción? Los mecanismos lógicos, los razonamientos matemáticos, son generales, abstractos. Analiza, trata de eliminar los detalles irrelevantes para la mecánica del problema y verás que la lógica te puede ayudar a resolverlo mejor, o al menos a tener más probabilidades de resolverlo bien, a tener ventaja para llegar a buen fin.

Te dejo con un ejercicio para que puedas hacer las cuentas de una situación que también sorprende a mucha gente.

Ejercicio 1: Imagínate que estás en uno de esos exámenes de oposición en los que hay un temario que preparar, pongamos que son 25 temas, y que, de entre todos los posibles temas, el día del examen se sacan 3 números que corresponden a 3 de ellos. Tú tienes que elegir uno para desarrollar en el examen. ¿Cuántos temas tienes que estudiarte para tener un 90 % de probabilidades de que va a tocar al menos uno de los temas que has estudiado?

8. Problemas, problemas, problemas

Siempre se ha dicho que no te emparejes con un matemático, que siempre tenemos problemas, que nos gustan los problemas, que andamos buscando problemas. Es un chiste malísimo. Pero es verdad. No hay nada mejor para un matemático que un buen problema, son la chispa de la vida. No siempre es fácil saber cuál va a ser un buen problema y cuál no. Un buen problema es una fuente de alegría, y un problema puede calificarse como bueno por diferentes motivos.

Hay problemas sencillos que pueden ser bonitos porque se pueden atacar desde distintos puntos de vista, porque su solución (o sus soluciones) ponen en juego conceptos sencillos de los que se descubren relaciones en principio insospechadas. El problema del cuadrado y el círculo que hemos visto en el capítulo sobre las distintas inteligencias matemáticas es un buen ejemplo de esto.

También hay buenos problemas cuyo planteamiento es sencillo, a veces extremadamente sencillo, pero cuya solución es complicada, a veces extremadamente complicada.

Algunos de estos problemas pueden pasar siglos sin resolverse, y alcanzar fama mundial como retos a los que nos encanta enfrentarnos. Quizá el ejemplo más destacado de este tipo de problemas sea el último teorema de Fermat.

Finalmente puede haber problemas que son buenos porque son importantes, porque proporcionan resultados que realmente tienen mucho alcance, que iluminan áreas enteras del edificio de las matemáticas o que descubren pasadizos que comunican campos completos de las matemáticas con otros con los que se pensaba que no tenían relación. Esos son los grandes problemas de las matemáticas. Quizá el mayor de todos ellos, de entre los que siguen sin resolverse, sea la hipótesis de Riemann. Pero no es el único.

Acompáñame a echar un vistazo a alguno de estos problemas, que son a la vez los enemigos queridos de los matemáticos, el lugar de sus esfuerzos y la fuente de sus alegrías y frustraciones.

Te he dicho que quizá el problema más famoso de los últimos siglos haya sido el último teorema de Fermat. Es un problema sencillísimo de plantear, pero cuya solución, que llegó tras más de 300 años de intentos fallidos, es extremadamente complicada. Seguramente has oído hablar de este problema. Pierre de Fermat, que fue quien lo propuso, era un abogado aficionado a las matemáticas que tenía un talento extraordinario y buena amistad con algunos de los principales matemáticos de su época. En 1637 se le ocurrió al hombre el siguiente problema: supongamos que n es un número entero mayor que 2. Entonces no existen tres números enteros x, y, z tales que $x^n+y^n=z^n$. Lo de que n sea mayor que 2 es importante, te das cuenta, ¿verdad? Claro, si n es igual a 2 estamos en el teorema de Pitágoras, donde x e y serían los catetos de un triángulo rectángulo y z sería la hipotenusa. Y tú y yo sabemos que existen infinitos triángulos rectángulos cuyos lados son números enteros. Por ejemplo, $x=3$, $y=4$, $z=5$ cumplen que $x^2+y^2=z^2$. Así que, con ese gusto de los matemáticos por generalizar, es normal que a alguien se le ocurriera tratar de ver qué pasaba si, en lugar de elevar los números al cuadrado, los elevábamos a 3, a 4 o a lo que sea. Raro será que para $n=2$ haya infinitas soluciones, y para n mayor que 2 no haya ninguna. Eso pensaría seguramente Fermat al principio, pero por más que buscó no encontró ningún trío de esos de x, y, z que cumplieran la ecuación con n mayor que 2, así que dijo que no había ninguno. Y se quedó tan ancho. Bueno, él dijo que lo sabía demostrar, pero que la demostración no le cabía en el margen del libro en el que estaba escribiendo las anotaciones. El caso es que Fermat se murió, nunca escribió su demostración, que se sepa, y a la gente le picó el gusanillo de tratar de demostrar eso que decía Fermat. Como ya sabes (acuérdate del capítulo «Somos matemáticos»), un problema así tiene dos opciones de solución: o encuentras un ejemplo de tres números x, y, z más un número n que cumplan que $x^n+y^n=z^n$ o bien das un argumento que demuestre que es imposible. Como te digo, montones de matemáticos se lanzaron en la búsqueda de soluciones, por un camino o por otro. Pero la cosa se resistía. Sesudas mentes se enfrentaron al problema,

incluidos el divino Euler y el gran Gauss, el «príncipe de las matemáticas». Y todos fallaron. Es verdad que algunos casos particulares se demostraron (Euler demostró el caso n=3, Fermat mismo demostró el caso n=4, Legendre demostró el caso n=5, Lamé el caso n=7...), pero nadie encontró un trío de esos chulos. Pasaban los siglos y nadie podía dar tampoco un argumento definitivo que demostrara que nunca podría encontrarse algún trío ejemplar. Hasta 1993. En ese año, un matemático de Oxford, el típico señor con poco pelo y gafas, llamado Andrew Wiles, dio una serie de conferencias en el Instituto Newton de Matemáticas de Cambridge (que es un sitio que tiene pizarras incluso en los baños y en los ascensores, por si te pilla la inspiración en un atasco, del tipo que sea). En aquellas conferencias, Wiles, que llevaba varios años encerrado, sin publicar nada, enfrascado en el problema, demostró que Fermat tenía razón. Wiles trabaja en curvas elípticas y formas modulares, unas áreas de las matemáticas demasiado complicadas como para poder explicarlas aquí en pocas páginas, pero lo suficientemente asequibles como para recomendarte que busques información y te intereses por ellas. El caso es que se había descubierto una relación entre otro problema, llamado la conjetura de Taniyama-Shimura, y el teorema (por aquel entonces conjetura) de Fermat. Si se demostraba la conjetura de Taniyama-Shimura, se demostraba el teorema de Fermat. Y eso es exactamente lo que hizo Wiles. Demostró, junto con su estudiante Taylor, un caso especial de la conjetura de Taniyama-Shimura que era suficiente para demostrar el teorema de Fermat. ¡Noticia mundial en el mundo de las matemáticas! En serio, fue increíble el momento. Tres siglos más tarde se demostraba el teorema de Fermat. Pero los hados no acababan de ser favorables a Wiles. En su demostración se encontró un fallo (imagínate qué agobio), pero Wiles se encerró de nuevo y en 1995 lo tenía resuelto del todo. Su demostración es totalmente rigurosa.

Así que, ¿cómo te quedas? Ya puedes dormir con tranquilidad, sabiendo que cuando n es mayor que 2, no existen tres números enteros x, y, z tales que $x^n+y^n=z^n$. Psssst, la verdad es que tu vida no acaba de dar un giro radical, ¿no? Y la verdad es que la mía tampoco, si te soy sincero. Vale, es un resultado bonito, el problema es chulo, es genial que alguien tras tantos años lo haya demostrado, la historia del problema y de la demostración es preciosa (te recomiendo que leas el libro de Simon Singh sobre el tema, es maravilloso)... Lo que quieras, pero en realidad no es algo exageradamente importante, hay otros teoremas más relevantes. Bueno, no sé, igual es verdad que no es tan significativo como otros, aunque eso nunca se sabe, pero tampoco es un resultado sin importancia, porque relaciona distintas partes de las matemáticas, y además puede que, en el futuro, del teorema de Fermat se puedan extraer consecuencias de valor incalculable.

Eso sí, déjame que extraiga una enseñanza de todo esto, una especie de «moraleja» en plan autoayuda. Los trescientos años de esfuerzos errados, de intentos fallidos de los matemáticos que intentaron demostrar el teorema de Fermat, no fueron para nada en vano. Grandes avances del álgebra mo-

derna se produjeron en esos intentos, se desarrollaron matemáticas nuevas, que no existían, prácticamente se creó todo un área, que hoy conocemos como teoría algebraica de números, y que se enseña en las facultades de Matemáticas de todo el mundo, porque es un área tremendamente importante, dentro de las matemáticas y en sus aplicaciones. Con las matemáticas nunca se sabe en qué momento vas a encontrar oro. Y en muchos casos, como en el del teorema de Fermat, es más importante lo que uno encuentra intentándolo que el resultado final. Esto, que podría ser una frase de esas que se ponen en tarjetas con gatitos, es la vida cotidiana de los matemáticos. Nunca dejamos de enfrentarnos a un problema porque no tengamos claro si lo vamos a solucionar o no. Y eso es porque estamos seguros de que si los pasos que damos son firmes (en el sentido lógico-matemático de la palabra), entonces seguro que de ellos se extraerá beneficio. Puede que incluso un beneficio mayor que la mismísima solución al problema. Ésta es otra de las razones por las que merece la pena tener algo de matemático, hacer caso a ese matemático interior. Te da una forma de acercarte a los problemas no sólo rigurosa, para «domar la intuición», como decía en el capítulo anterior, sino para abordar cualquier problema con descaro, sin importar el fracaso. Porque si los pasos se dan de modo adecuado, el fracaso no existe (literalmente), sino que hay que estar atento para descubrir los éxitos «colaterales» que vas obteniendo.

Así que ahora entiendes un poco más nuestra afición por los problemas, ¿verdad? No creas que el último teorema de

Fermat es el único problema de enunciado sencillo que ha pasado siglos resistiéndose al escrutinio de los matemáticos. Hay otros que llevan cientos de años sin resolverse, y que no se han resuelto aún. ¿Tienes curiosidad? Te cuento en unas pocas líneas alguno de estos problemas, por si se te ocurre una solución, o por si quieres leer sobre los avances que se van produciendo, o aunque sea para que, cuando leas en el periódico que alguien los ha resuelto, puedas hablar con autoridad, diciendo que ya conocías el problema. «E incluso he hecho mis humildes intentos, no del todo infructuosos…», podrías decir. Quedarías estupendamente.

Es obligatorio hablar primero de la conjetura de Goldbach. Tú ya sabes lo que es un número par. Son pares el 2, el 18, etc., todos los que pueden dividirse entre dos y dan resto 0 (o sea, que el 0 también es par, por si te entran dudas). Y también sabes lo que es un número primo, el 3, el 7, el 53, etc., todos los que sólo son divisibles entre ellos mismos y entre 1 (por cierto, que el 1 no es primo, por si te entran dudas). Bien, pues en 1742 (año par), el bueno de Christian Goldbach, un señor prusiano con barba, escribió en una carta a Euler esta bonita frase: «Todo número par mayor de 2 puede ponerse como suma de dos números primos». Sencilla, clara, inocente. Llevamos casi 300 años de historia desde que Goldbach dijera eso. Han pasado imperios, guerras, ha nacido internet, se escribió *El Señor de los Anillos*, se inventó el cine y el teléfono… y seguimos sin saber si lo que dijo Goldbach es verdad o no. ¿A que parece una cosa sencilla? Pues esta frase, que se conoce como la

conjetura de Goldbach, trae de cabeza a los matemáticos desde hace casi tres siglos. Hardy (el gran matemático inglés de la primera mitad del siglo xx, ya lo hemos conocido) dijo que probablemente era el problema más difícil de las matemáticas. Es difícil decir eso con seguridad (aunque si lo decía Hardy, por algo será), pero lo que está claro es que es muy difícil enunciar en términos más sencillos una cuestión más complicada. Puedes probar: el 4 es 2+2 (no hace falta que los dos primos sean distintos), el 8 es 5+3, el 14 es 11+3 y también es 7+7 (no hace falta que la suma de primos sea única). Y así puedes pasarte las horas. Con ayuda de ordenadores, se ha probado con todos los números pares hasta cuatro trillones más o menos y todos se pueden poner como suma de dos primos. Se cree que la conjetura es cierta, pero a estas alturas del libro ya sabes que mientras no haya una demostración rigurosa las creencias, en matemáticas, no sirven de nada. ¿Quién te dice que no hay por ahí un número par de miles de cifras que no se puede poner como suma de dos primos? Los números son caprichosos, y que no hayamos encontrado ninguno hasta ahora no quiere decir que no los haya.

Se sigue investigando en la conjetura de Goldbach, y se sigue avanzando. En 2013, un matemático peruano, Harald Helfgott, demostró lo que se conocía como «conjetura débil de Goldbach», que dice que todo número impar mayor que 5 puede ponerse como suma de tres números primos. Se llama conjetura débil porque si la de Goldbach es cierta, ésta inmediatamente también lo es. Pero al revés no, por suerte

o por desgracia. La conjetura débil se ha logrado demostrar; la «fuerte» sigue desafiándonos casi 300 años después.

Otro problema del que te tengo que hablar seguro es el problema de los primos gemelos. Los números primos son uno de los mayores enigmas de las matemáticas. Son la pieza fundamental de la aritmética, esa parte de las matemáticas que trata de los números y sus relaciones. Se sabe desde la Antigüedad que hay infinitos números primos; ya Euclides lo demostró. Ya que estamos aquí, no me resisto a contarte la demostración de Euclides, que es maravillosa, es otro de esos logros que son tan patrimonio cultural de la humanidad como el Partenón o la música de Mozart; lo que pasa es que es menos conocido, pero es una de esas conquistas intelectuales preciosas y permanentes. La demostración la hizo Euclides por reducción al absurdo.

Supongamos que hay un número finito de números primos y llamemos P al más grande de todos ellos. No sabemos cuánto es P, pero sabemos que tiene que haber uno que sea el mayor de todos. Ahora construimos el siguiente número: $Q=(2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot P)+1$, es decir, hacemos el producto de todos los números primos y le sumamos 1. Está claro que Q es mayor que P, pero es que además Q es primo. Mira por qué: resulta que como $Q=(2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot P)+1$, entonces $1=Q-(2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot P)$, está claro, ¿no? Pero si Q es divisible por algún número primo p (siempre es así, porque si es divisible por uno que no sea primo, por ejemplo n, basta con coger uno de los factores primos de n), entonces resulta que p es un factor común de Q y de $(2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot P)$ y, por tanto, p divide a

1, lo cual es imposible. Así que nuestra hipótesis de partida es incorrecta: no hay un número finito de números primos. Es una demostración perfecta, bellísima y muy antigua. Hay otras muchas demostraciones del hecho de que hay infinitos números primos, pero ésta es mi favorita.

Bueno, a lo que iba, los primos gemelos. Como te decía, los números primos, siendo tan importantes, son un misterio. Nadie sabe cómo están distribuidos en la recta de los números. O sea, cuando tienes un número primo, el siguiente puede estar muy cerca o muy lejos; así, en general, nadie sabe dónde va a estar el siguiente. Con los pares no pasa eso; tú sabes que, dado un número par, el siguiente siempre está dos números más allá. Con los primos no hay nada parecido, no se sabe cuánto tardará en aparecer el siguiente.

Y en todo este lío, hay unos números primos especiales, que llamamos primos gemelos. Son muy bonitos, porque son números primos que sólo están separados por un número en medio de ellos. Como el 11 y el 13, que están separados por el 12, o como el 29 y el 31, separados por el 30. Hay muchísimos pares de primos gemelos. Los más grandes que se conocen tienen más de 58.000 dígitos, una monstruosidad. Se saben muchas cosas sobre los primos gemelos, han sido objeto de investigación desde muy antiguo, y tienen cosas sorprendentes. Pero hay una cosa sobre ellos que no se sabe: no se sabe si hay un número finito o infinito de ellos. Es lo que se conoce como la conjetura de los primos gemelos, que dice que hay infinitos números primos p tales

que $p+2$ también es primo. Otro problema hermoso que nos tiene a los matemáticos robadito el corazón.

Te voy a contar otro problema curioso, curiosísimo, que personalmente me encanta, porque aunque a primera vista parece una cosa sin sentido, un invento raro, la verdad es que es muy entretenido y sorprendente. No sé, a mí me divierten esas cosas curiosas. A ver qué te parece. Se conoce como la conjetura de Collatz. Ya ves que cuando hay una pregunta interesante, de la que no sabemos la respuesta, la llamamos siempre conjetura. Mira cómo funciona ésta:

Toma un número natural cualquiera, el que quieras, da igual. Si es par, lo divides entre dos (con lo que tendrás otro número natural) y si es impar, lo multiplicas por tres y le sumas uno al resultado (con lo que, otra vez, tendrás otro número natural). Con el número que te haya salido haz lo mismo, y así sucesivamente. La conjetura de Collatz dice que empieces con el número que empieces, por raro o grande que sea, siempre acabas cayendo en un círculo vicioso formado por el 4, el 2 y el 1. Fíjate que en cuanto caes en uno de esos tres números, quedas atrapado para siempre en el círculo: el 1 es impar, así que multiplico por tres y sumo uno, obteniendo el 4, como es par, lo divido entre dos y llego al 2, que como es par lo divido entre dos y llego al 1, y vuelta a empezar.

Puedes probar, ya verás que tarde o temprano llegas al 1. Hay números que llegan enseguida, como el 8, cuya cadena es 8-4-2-1. Pero los hay con cadenas bastante más largas, el 27, por ejemplo, tan inocente que parece, tarda 111 pasos en llegar al 1.

Por supuesto, se han hecho búsquedas intensivas de números que no lleguen al 1, se han escrito programas de ordenador, y se ha comprobado con todos los números hasta varios trillones que siempre se llega al 1. Ya sabes que esto no quiere decir nada, cualquier día encontramos un contraejemplo... o un argumento que diga que la conjetura es cierta. De momento, ni uno ni otro.

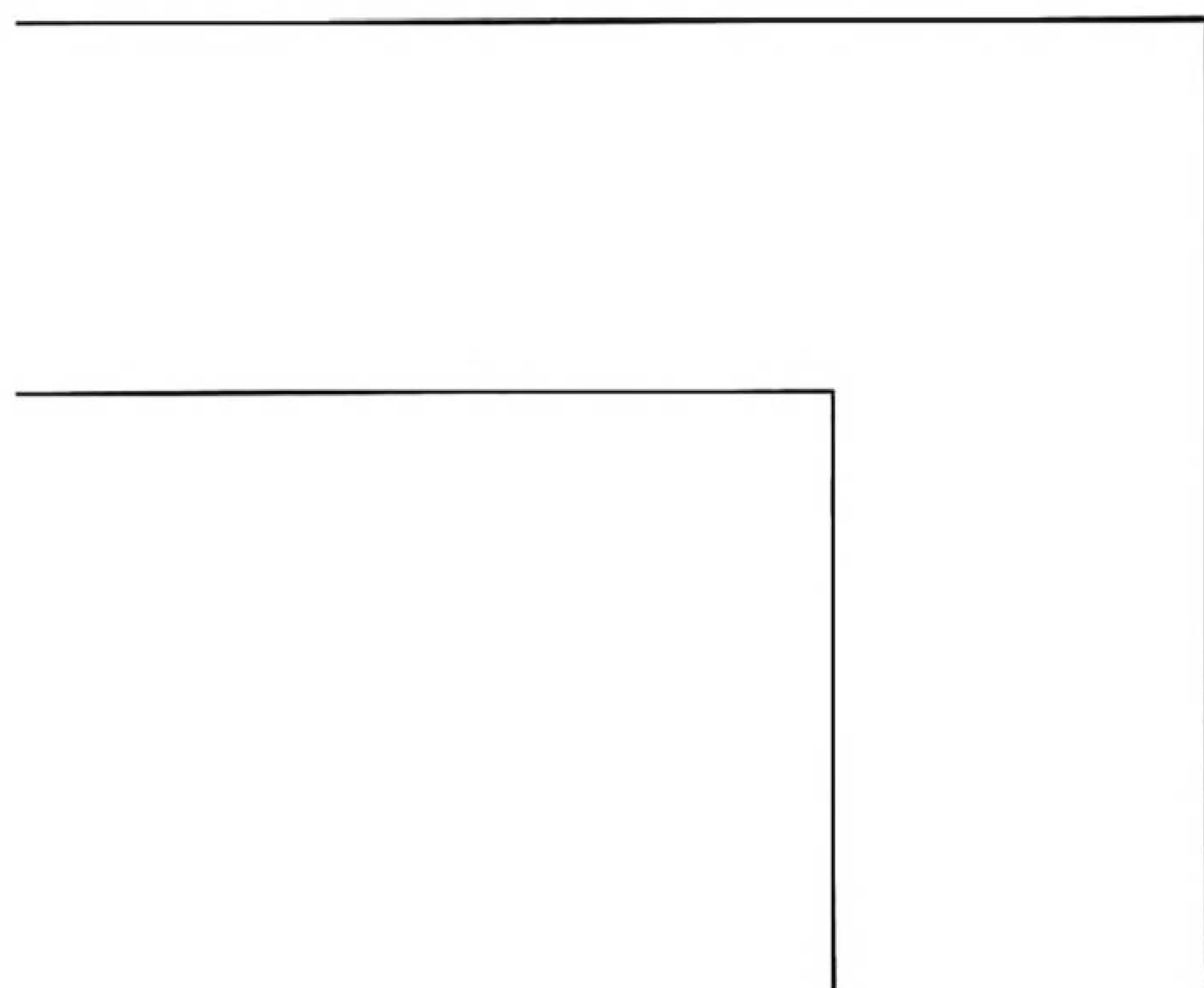
Es una chulada lo de Collatz, pero vamos con otro problema bonito también. ¿Sabías que existen números perfectos? Se llaman números perfectos a los que son iguales a la suma de sus divisores propios. Más despacio: como sabes, cada número natural tiene unos cuantos divisores primos. Todo número natural se puede poner de forma única como producto de números primos (repetidos o no). Este resultado se llama «Teorema Fundamental de la Aritmética». Fun-da-men-tal, o sea, muy importante. La primera demostración completa de esta joya se la debemos a Gauss. Los divisores de un número son todos los números que lo dividen, sean primos o no; por ejemplo, el 4 es un divisor del 8, y no es primo; el 1 divide a cualquier número y tampoco es primo. Y los divisores propios de un número son todos sus divisores menos él mismo. Por ejemplo, los divisores del 8 son el 1, el 2, el 4 y el 8, pero sus divisores propios son sólo el 1, el 2 y el 4. Si sumas los divisores propios del 8 da 1+2+4=7, que es menor que 8, así que decimos que el 8 es un número deficiente, pobrecito. Hay otros números en los que la suma de los divisores propios es mayor que el número, por ejemplo, el 12. Sus divisores propios son: 1, 2, 3, 4 y 6,

y su suma es 16, que es mayor que 12. A estos se les llama números excesivos. Y luego hay otros números, joyas elegidas por el destino, que son exactamente iguales a la suma de sus divisores propios, como el 6, cuyos divisores propios son 1, 2 y 3, que suman exactamente 6. A estos números son a los que llamamos números perfectos. El 6 es perfecto, el 28, el 496... En el momento de escribir estas líneas se conocen exactamente 49 números perfectos. El resto es misterio. No se sabe si hay infinitos números perfectos o no. Y lo que es todavía más misterioso es que los 49 números perfectos que se conocen son pares. No se conoce ningún número perfecto impar. Pero no se sabe si puede haberlos o no. Muchos matemáticos piensan que no, que todos los números perfectos son pares. Pero nadie lo ha demostrado. Este curioso problema también pertenece a la lista de los grandes misterios en matemáticas.

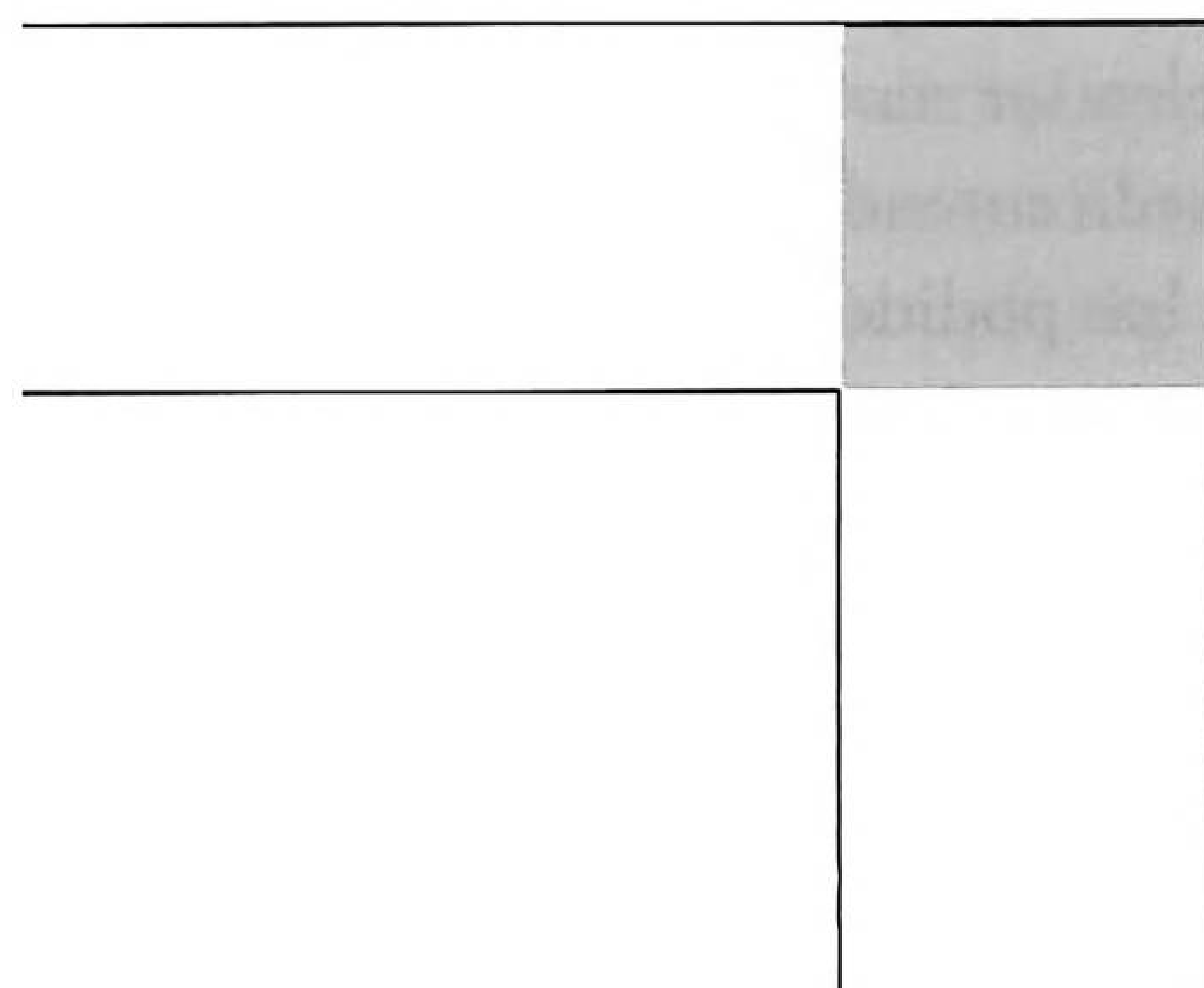
No te creas que todos los problemas estos que están sin resolver tienen que ver con números; qué va, no quiero darte esa impresión. Lo que pasa es que los problemas estos de números suelen ser sencillos de enunciar y cualquiera (más o menos) puede entender el planteamiento. Otra cosa diferente, como has podido comprobar, es darles una solución. Eso, desde luego, no está al alcance de cualquiera.

Un problema precioso, que sigue también sin solución, y que no va de números, es el llamado «problema del sofá», y es bastante curioso.

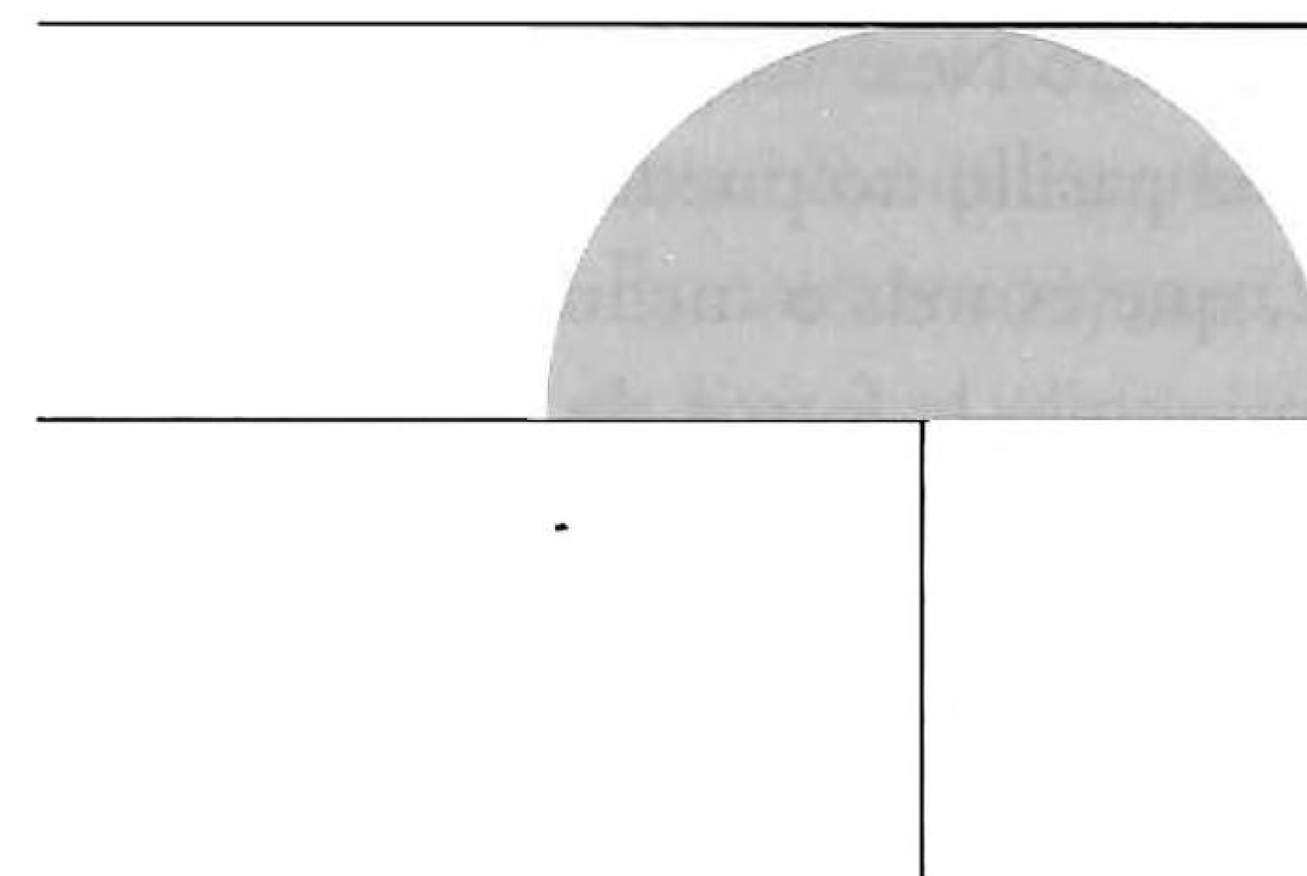
Imagínate un pasillo con una esquina en línea recta que tiene un metro de ancho. Mira el dibujo:



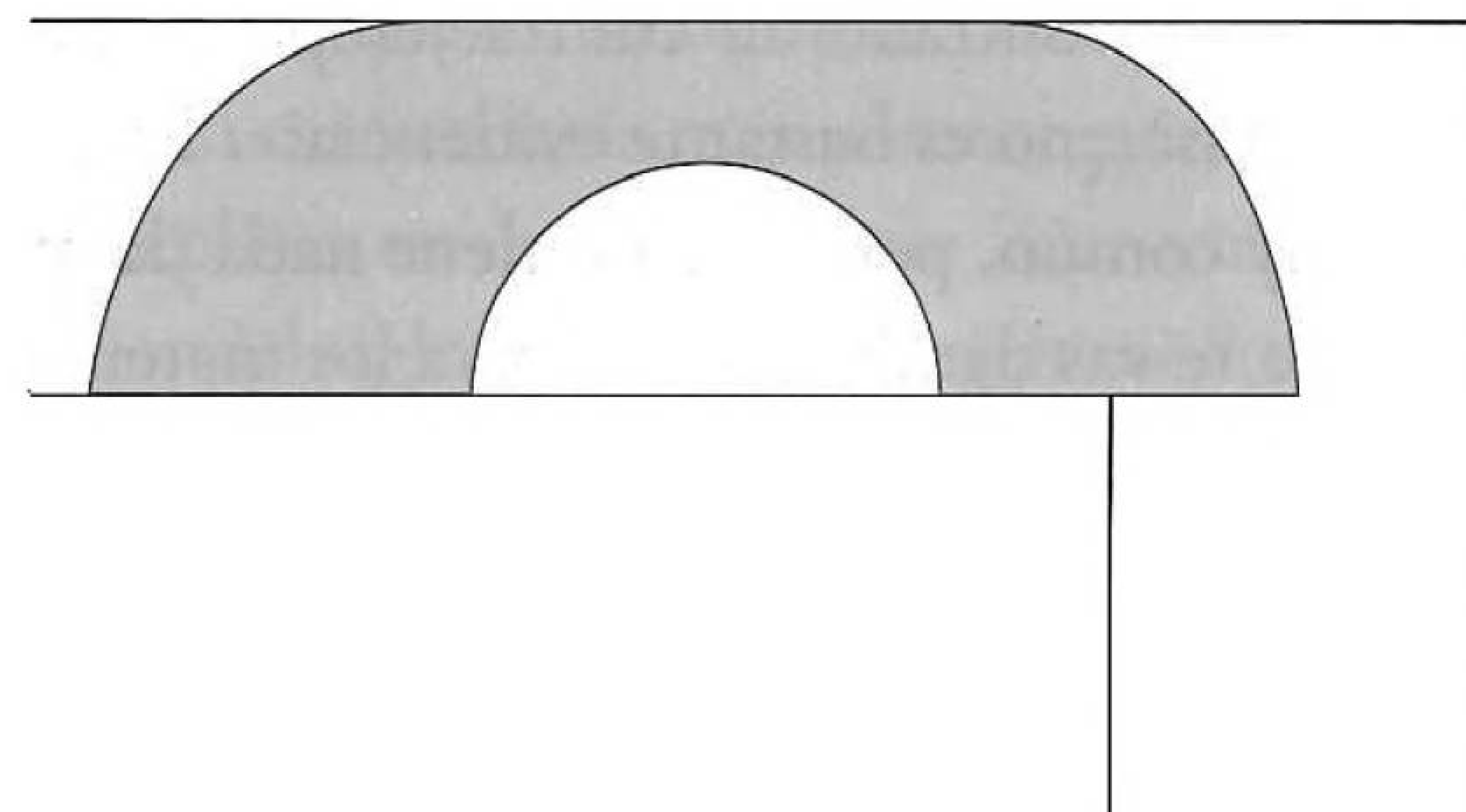
Aquí ocurre todo en dos dimensiones, como los juegos retro de videoconsola. Es que si no la cosa se complica demasiado. El problema del sofá pregunta cuál es el área máxima de un objeto que pueda pasar por ese pasillo. Hummm, parece una cosa más o menos sencilla, no sé… vamos a hacer alguna prueba a ver qué pasa. Está claro que un cuadrado de 1 metro por 1 metro pasa por la esquina.



El área del cuadrado es 1 metro cuadrado, así que vamos a ver si podemos superarla. Sí que se puede, porque un semicírculo de radio 1 metro también pasa, mira el dibujo.



Y el área es $\pi/2$, que es algo más de 1,6 metros cuadrados. ¿Se puede mejorar todavía más? Pues sí, en 1968 un tal John M. Hammersley propuso una forma que tiene un área de $\pi/2+2/\pi$ (que es algo más de 2,207 metros cuadrados) que también pasa por el pasillo. La forma de Hammersley tiene la pinta que ves en el dibujo.



La cosa se quedó así hasta que en 1992 Joseph Gerver hizo unas pequeñas modificaciones a la forma de Hammersley, redondeándole hábilmente algunas esquinas, y aumentó un pelín el área hasta 2,219 metros cuadrados. Se sabe, porque lo demostró Neal Wagner, que el área de una figura que pase por el pasillo no puede ser mayor que 2 multiplicado por $\sqrt{2}$, que es más o menos 2,82 metros cuadrados. Así que en principio la forma de Hammersley y Gerver se puede superar. En los últimos veintipico años no ha habido avances. Más bien se sospecha que Gerver consiguió el máximo que se puede. Pero de momento nada de nada, ni una forma mejor, ni una demostración de que Gerver triunfará para siempre. Si te apetece, toma papel, lápiz, un compás y mucho ingenio, y comprueba hasta dónde puedes llegar. Quizá la gloria del problema del sofá te esté reservada a ti.

Creo que es momento de hacer un comentario al hilo de estos problemas. Has visto que, en algunas de las conjeturas estas, por ejemplo, la de Goldbach, la de Collatz o la de los números perfectos pares, se han hecho comprobaciones por ordenador hasta números enormes, que uno dice: «Hombre, si no se ha encontrado un contraejemplo hasta ahora, ¿qué más queréis?, ¿no es bastante evidencia?». Es un modo de pensar muy común, pero que no tiene nada de matemático. Como ya te vas dando cuenta, para los matemáticos si no hay demostración no está dicha la última palabra. Que una cosa funcione para cientos, miles, millones o trillones de ejemplos no quiere decir que vaya a funcionar siempre. Y ya ha habido casos en los que un resultado se comprobaba para montones de ejemplos y de repente aparecía por ahí un contraejemplo enorme que nadie se esperaba. Un caso famoso fue lo que se llamaba «conjetura de Polya», que decía lo siguiente (la conjetura es de 1919). Cogemos un número cualquiera, pongamos n, y dividimos los números más pequeños que n en dos conjuntos: los que tienen un número par de divisores primos (lo llamamos conjunto A) y los que tienen un número impar de divisores primos (lo llamamos conjunto B). Entonces, la conjetura dice que A tiene tantos elementos como B o más, no puede tener menos. Y eso para cualquier n que cojamos, siempre. Como puedes esperar, ya vas pillando cómo trabajan los matemáticos, la gente se puso a buscar contraejemplos o bien un argumento que lo demostrara. Se probaron miles, centenares de miles de números, hasta que en 1958 Haselgrove demostró que la conjetura era falsa, y que debía haber un contraejemplo de unas 360 cifras. Años más tarde, en los 80, Tanaka encontró el contraejemplo más pequeño a la conjetura de Polya: 906.150.257. O sea, que hasta novecientos millones y pico, todos los números lo cumplen, pero luego hay uno (más de uno en realidad) que no lo cumple. ¿Ves como no te puedes fiar? Hay otro caso todavía más potente, aunque es un poco difícil de explicar en detalle, pero te lo cuento por encima. A principios del siglo XX se creía que para todo número x, la función que cuenta el número de primos menores que x, que se escribe $\pi(x)$, era menor que otra función (ésta es la difícil de explicar), que se llama el «logaritmo integral de x», y se escribe $li(x)$. Bueno, pues al final se demostró que no, que no

siempre es menor, eso sí, el primer número para el que se vio que eso falla lo dio Skewes, y es un número que tiene más de 96.000 cifras, vamos, que escrito en el tamaño de letra de este libro ocuparía más de 60 páginas el numerito. Luego se han dado otros contraejemplos más pequeños, pero aún no se ha bajado de las 300 cifras, y eso son trillones de trillones de trillones de trillones...

Como sabes, uno de los propósitos de este libro es que te hagas una idea de cómo trabajan los matemáticos, y éste es un punto importante para entenderlo: no se fían de nada, nunca, no dan nada por supuesto, ni siquiera se fían de la «abrumadora evidencia numérica» en favor o en contra de un resultado. En esto las matemáticas se distinguen de otras disciplinas. Da igual lo grande que sea la evidencia numérica en favor de una conjetura. Si no hay demostración o contraejemplo, la conjetura no se tiene por cierta o falsa. Por mucho que parezca evidente, por mucho que el sentido común nos diga que parece cierta, por mucho que en miles, millones, trillones de ejemplos funcione, si no hay demostración no hay nada definitivo, y si no hay nada definitivo, no se acepta como resultado matemático. Es un precio alto, es verdad, pero a cambio los resultados de las matemáticas son eternos, inmutables y definitivos. Y es ese rigor lo que hace a las matemáticas ser lo que son, y por tanto hace a las ciencias y a la tecnología ser lo que son.

Al principio de este capítulo te decía que los buenos problemas son también aquellos de gran alcance, los que establecen relaciones entre las grandes áreas de las matemáticas,

los que abren grandes líneas de investigación, los que conforman la espina dorsal de esta disciplina maravillosa. Esos son los problemas a los que se dedican los mayores esfuerzos de los mejores matemáticos de cada generación. Problemas como el del sofá, o la misma conjetura de Collatz, quizá nunca entren en esta categoría, pese a ser magníficos problemas que proporcionan grandes satisfacciones a quienes los enfrentan. De todas formas eso de que no entrarán en la categoría de los grandes problemas hay que decirlo con prudencia; uno no puede estar seguro de por dónde van a venir aportaciones decisivas. Pero sí es cierto que hay algunos problemas que en matemáticas se identifican como decisivos, como profundamente reveladores, y muchas veces se han hecho algunas listas de problemas que la comunidad matemática quisiera ver resueltos y a los que gran parte de los matemáticos dedican su trabajo, tratando de arrojar luz siquiera sobre algún minúsculo rincón.

Quizá la primera y más famosa lista de este tipo de problemas la diera en el año 1900 el gran David Hilbert, uno de los hombres más influyentes en la matemática moderna. En agosto de aquel año, en el II Congreso Internacional de Matemáticos, que se celebraba en París, Hilbert pronunció una conferencia con la intención de dar una lista de los problemas fundamentales a los que la matemática tendría que enfrentarse durante el siglo XX. Esa lista, publicada completa algo más tarde, constaba de 23 problemas. Es un inventario de problemas que hay que entender en su momento histórico, y que no predecía algunas de las revoluciones que ocu-

rrieron en la matemática del siglo XX, pero que fue aceptado por consenso en la comunidad y que tuvo una influencia espectacular. Algunos de esos problemas fueron resueltos, otros siguen sin resolverse. Otros se demostró que nunca podrán resolverse, lo cual supuso un verdadero revés para los fundamentos de las matemáticas. En general, son problemas difíciles de explicar a quien no tiene una formación específica, pero para alguno de ellos ya tienes suficientes conocimientos si has llegado hasta aquí.

El primero de la lista es conocido como «la hipótesis del continuo». ¿Te acuerdas del capítulo sobre qué es un número, cuando al final hablábamos de que hay infinitos más grandes que otros? En ese capítulo te decía que los números naturales son infinitos, y que los reales también, pero más. Siendo el cardinal de ambos conjuntos infinito, el de los reales es más grande que el de los naturales. Bueno, pues el primer problema de la lista de Hilbert, la hipótesis del continuo, pregunta si existe algún infinito en medio de estos dos, si hay algún conjunto cuyo cardinal sea estrictamente mayor que el de los naturales y a la vez estrictamente menor que el de los reales. El problema y sus intentos de solución tocaron los fundamentos mismos de las matemáticas. Es una historia compleja, y no quiero aburrirte, pero creo que merece la pena decir un poquito.

Si te acuerdas, las matemáticas funcionan a partir de unos axiomas y una lógica, piezas básicas a partir de las que construimos todo lo demás. Así lo hemos hecho con los números y sus operaciones a partir de los axiomas de Peano para los

naturales. Bueno, pues la teoría de conjuntos, quizá lo más abstracto en lo que podamos pensar, más aún que los números, tiene sus propios axiomas, y no fue fácil definirlos, te lo aseguro. Hoy en día, el conjunto de axiomas más aceptado, y por tanto la piedra base sobre la que se asientan nuestras matemáticas, son los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Bien, pues resulta que en 1940 Kurt Gödel, uno de los mejores lógicos de la historia, un personaje apasionante, demostró que la hipótesis del continuo no puede ser demostrada ni refutada dentro de los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Algo así como que ésta es una cuestión que escapa al poder de las matemáticas. Muy fuerte, ¿no? O sea, que las matemáticas pueden plantear problemas que no pueden solucionar. Así es, y dentro de las matemáticas que se basan en los axiomas de Zermelo-Fraenkel, la hipótesis del continuo es uno de esos problemas «problemáticos». No te voy a pedir que entiendas los detalles de esto, no los voy a poner aquí, pero si eres de esas personas que no tienen miedo a pensar, y tienes la paciencia y el arrojo suficientes, te animo a que leas la historia de este problema, que conozcas a Gödel y te metas en uno de los más profundos logros del pensamiento lógico de toda la historia. Por desgracia, esto queda fuera de los límites de este libro (y de mi capacidad, dicho sea de paso). No sé qué decirte sobre si con eso se solucionó o no el primer problema de la lista de Hilbert; lo que sí te digo es que éste es un problema central que removió los fundamentos de las matemáticas.

Otros problemas corrieron «mejor suerte» en el sentido de que tienen respuestas definitivas. Algunos de ellos, como

el problema 20, que se refiere a ecuaciones en derivadas parciales con condiciones de contorno (no pasa nada si no sabes de qué estoy hablando), han sido grandes temas de investigación en el siglo XX, como predijo Hilbert, y han llegado a soluciones completas. Otros, como el 16, que une las ramas de la geometría algebraica real y los sistemas dinámicos (que son dos áreas centrales en las matemáticas actuales), siguen sin resolverse. El problema 18 pregunta por la forma óptima de colocar esferas una junto a otra de manera que llenen el espacio de la forma más densa posible. Es un problema antiguo conocido como el problema de Kepler, al que se ha dado solución hace unos poquitos años. La demostración de la solución a este problema se apoya fuertemente en el recurso a los ordenadores. Esto ha abierto una nueva forma de hacer matemáticas, en la que los ordenadores no sólo se usan para hacer cálculos o verificar ejemplos, sino que ayudan a progresar a las matemáticas, asistiendo en las demostraciones. Es un campo nuevo y todavía controvertido, que Hilbert no pudo prever.

Con todas sus limitaciones, incluidas las propias de la época y el carácter personal de la lista, lo cierto es que la lista de los 23 problemas de Hilbert es probablemente la más relevante de todas las listas de grandes problemas de las matemáticas.

Nuestra época también tiene su propia lista de problemas estrella. Más cortita que la de Hilbert, pero también muy buena. Se llaman «los siete problemas del milenio» y fueron formulados por el Instituto Clay de Matemáticas en el año

2000. El Instituto Clay concede un premio de un millón de dólares a quien resuelva cada uno de los problemas, así que si andas corto de efectivo, ponte a ello cuando acabes el libro. Te advierto que no será fácil, eh; se ha dicho que resolver uno de los problemas del milenio es «la forma más difícil de ganar un millón de dólares».

Los siete problemas del milenio son los siguientes (como son poquitos te los escribo todos):

1. El problema P versus NP.
2. La conjetura de Hodge.
3. La conjetura de Poincaré.
4. La hipótesis de Riemann.
5. La existencia de la teoría de Yang-Mills y del salto de masa.
6. La solución de las ecuaciones de Navier-Stokes.
7. La conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer.

El primero es un problema de complejidad computacional, es el problema fundamental en este campo. Más o menos quiere dilucidar si existen problemas computacionales «realmente difíciles», intrínsecamente difíciles, o si por el contrario los problemas que nos parecen muy costosos de resolver no lo son en realidad, sino que lo que ocurre es que para ellos aún no hemos encontrado algoritmos suficientemente buenos. Se trata, en definitiva, de saber qué pueden resolver los ordenadores de forma eficiente y qué no. No es poca cosa, la verdad.

Siendo un poco más estrictos, aunque no del todo, que poner este problema en sus términos exactos es bastante complicado, decimos que un problema pertenece a la clase NP si podemos comprobar con un ordenador, usando «pocos» recursos, que algo es una solución del problema o no. La palabra «pocos» se refiere a unas condiciones descritas muy rigurosamente (por eso lo pongo entre comillas) y «recursos» se refiere normalmente a tiempo y memoria del ordenador. Y decimos que un problema está en P si podemos calcular con un ordenador, usando «pocos» recursos, una solución al problema. Observa la sutil diferencia; en el primer caso, nos dan un resultado y podemos comprobar fácilmente si es una solución al problema o no; en el segundo caso lo que hacemos es calcular la solución, desde cero. Por supuesto, todo problema que está en P está también en NP, ya que si podemos calcular fácilmente una solución, podemos comprobar fácilmente si lo es. La cosa está en saber si hay problemas en NP que no están en P, o sea, problemas para los que podemos comprobar en poco tiempo una solución, pero para los que calcular una solución es costoso. Te pongo un ejemplo para que te hagas mejor a la idea de lo que estoy hablando. Un problema que está en NP es el siguiente: supongamos que tenemos un conjunto de números enteros, el que sea. ¿Hay un subconjunto de ellos cuya suma sea 0? Si tú me das un subconjunto, te puedo decir fácilmente si son una solución al problema o no: los sumo, y si suman 0 son una solución. Si no, no. Ahora, dado el conjunto entero, para encontrar una solución (si es que la hay) puede que

tenga que comprobar todos los posibles subconjuntos, y si la cantidad de números es n, el número de subconjuntos es 2^n. Un montón, sobre todo si n es grande. Así que, en general, encontrar una solución es muy costoso. A no ser que haya otra forma de solucionar esto sin comprobar todos los conjuntos (o sin tener que hacer otras cosas igual de costosas). Problemas de estos hay montones, y es el tipo de cuestiones sobre las que trata el problema P vs. NP.

Es un problema fundamental, con innumerables aplicaciones, y que está en los fundamentos de la teoría de la computación. Casi todo el mundo piensa que P es distinto a NP, que hay problemas en NP que no están en P, pero nadie ha podido dar una demostración. El millón de dólares sigue esperando.

Los problemas 2 y 7, la conjetura de Hodge y la de Birch y Swinnerton-Dyer son bastante complicadas de explicar del todo. La primera habla de variedades algebraicas, algo así como superficies que están definidas por ecuaciones algebraicas (polinomios, si lo prefieres), y la segunda habla de curvas elípticas, un tipo de curvas especiales, que son muy importantes en matemáticas porque se relacionan con muchos campos diferentes (tuvieron su papel en la solución de Wiles del teorema de Fermat, por ejemplo). Lo importante, entre nosotros, de estos dos problemas es que su solución permitiría de un plumazo conectar áreas distantes de las matemáticas y solucionar muchos otros problemas a la vez. Esto es algo crucial en el modo como trabajan los matemáticos: cuando se da un resultado de éstos, que conecta distintas

áreas, una consecuencia fabulosa es que las herramientas que se usan en un área sirven para resolver problemas en la otra, y viceversa. Cada una de las áreas tiene su historia, a lo largo de la cual ha desarrollado sus propias técnicas y ha obtenido sus propios resultados, muchas veces de forma totalmente independiente al resto del ancho mundo de las matemáticas. Así que cuando se descubre que dos áreas están conectadas, el enriquecimiento mutuo es enorme. Un ejemplo sencillo es la geometría analítica (no te pongas nervioso con el nombre, que es lo que se estudia en el instituto). La cosa consiste en que (gracias a Descartes y otros), dando coordenadas a los puntos de una curva, por ejemplo, podemos estudiar propiedades de la curva estudiando propiedades de las coordenadas. Y así, resolviendo ecuaciones (que en principio es algo que no tiene nada que ver con el dibujo de la curva) podemos saber dónde tiene la curva sus máximos, sus mínimos, dónde es cóncava, convexa, dónde corta a los ejes… y eso gracias a que la geometría (la curva) y el análisis (las ecuaciones) se hallan conectadas. Ese tipo de cosas a los matemáticos nos hacen llorar de la emoción.

Hay dos problemas de los siete, el 5 y el 6, que son problemas de física matemática. La solución de estos problemas resolvería dos cuestiones muy importantes y muy difíciles en física. Las ecuaciones de Navier-Stokes describen el comportamiento de fluidos como el aire, los gases, los líquidos…, y comprender eso del todo trae de cabeza a los físicos e ingenieros desde hace mucho tiempo. La teoría de Yang-Mills y el salto de masa trata de explicar algunos de los misterios

primordiales de la física cuántica, que es como decir que trata de explicar algunos de los misterios de nuestra comprensión del mundo físico. El problema trata de establecer una teoría coherente, que nos permita siquiera comenzar a comprender cómo funciona el universo desde el nivel más pequeño al más grande. No hace falta que insista en la importancia de esto, pero sí quisiera decirte una vez más que avanzar en matemáticas supone avanzar en ciencia porque la ciencia se apoya en las matemáticas para fundamentarse. Desde luego, las soluciones a estos dos problemas marcarían hitos en la historia de la física.

Si te das cuenta, faltan dos problemas, el 3 y el 4, la conjetura de Poincaré y la hipótesis de Riemann. Los he dejado aparte porque son dos problemas singulares. Uno, porque es el único de los siete que se ha logrado resolver. El otro, porque es el Santo Grial de los problemas matemáticos, aquel que a todos nos gustaría ver resuelto por encima de todas las cosas. No sé si hay algún problema que merezca el título de «el problema más importante de las matemáticas», pero si lo hubiera, seguramente sería la hipótesis de Riemann.

La conjetura de Poincaré es un problema de topología. La topología estudia la forma de los objetos matemáticos, y de alguna manera tiene que ver con la geometría. Lo que ocurre es que la topología estudia propiedades geométricas que no dependen del tamaño de los cuerpos, o de ciertas transformaciones que podamos hacerles, como girarlos, contraerlos, etc., como si fueran de plastilina. Por ejemplo, el

número de agujeros que tiene un cuerpo no cambia si lo giramos o estiramos o encogemos. Éste es el tipo de propiedades que estudia la topología, y se encarga de clasificar los cuerpos según esas propiedades. La conjetura de Poincaré, ahora ya teorema, porque Grigory Perelman demostró que la conjetura es cierta (en realidad, lo que demostró Perelman es más general, así de genial es este hombre), dice que toda *n*-variedad compacta y simplemente conexa es homeomorfa a la *n*-esfera. ¿Cómo te quedas? Pues a no ser que hayas estudiado matemáticas, supongo que el enunciado no te dice gran cosa (va sobre algo de esferas, y poco más). Así, a lo bruto, este enunciado quiere decir que toda superficie, en las dimensiones que sea (eso es lo de *n*-variedades), que posea dos propiedades importantes que tiene una esfera (compacta y simplemente conexa), es equivalente a una esfera (eso es lo de homeomorfa), o sea, que la podemos deformar hasta convertir en una esfera (sin romperla, eso no está permitido). Lo importante de este resultado es que nos permite distinguir y clasificar montones de variedades, de superficies, en las dimensiones que queramos, sólo mirando esas dos propiedades. En general, estudiar una variedad es complicadísimo, así que este resultado nos da una herramienta más sencilla para saber si una variedad es «deformable» a una esfera o no. Para que veas un poco el tipo de trabajo que se hace en topología, te cuento por encima qué son esas propiedades. «Compacta» sencillamente significa más o menos que es finita. En realidad, lo que significa es que no podemos llegar al infinito a través de ella. No vamos a detenernos en

el concepto de compacidad. Es más curioso y más ilustrativo en este caso explicar qué significa «simplemente conexo». Imagínate que tienes una de esas gomas de pelo, que son una circunferencia que se puede estirar y encoger. Imagínate que ésta es tan flexible que se puede estirar todo lo que quieras y encoger todo lo que quieras, incluso hasta caber en un punto. Que una superficie sea simplemente conexa, quiere decir que puedes posar esta goma sobre la superficie y encogerla hasta que ocupe un punto sin salirte de la superficie. Imagínate una pelota de playa (o de tenis, o de fútbol, el tamaño da igual, que estamos en topología); esa superficie (una esfera) sí es simplemente conexa, ¿verdad? Tú, en teoría, puedes colocar la goma y encogerla todo lo que quieras. Piensa ahora en una rosquilla. Ahora ya no puedes hacer siempre esto de encoger la goma, porque si la colocas como un anillo abrazando la rosquilla, no hay forma de encoger la goma a un punto sin romperla. La rosquilla no es simplemente conexa. Así que no es equivalente (homeomorfa) a una esfera. Es posible que estés pensando: «Pues vaya logro, se ve evidentemente que una rosquilla no es equivalente a una esfera». Bien, ya hemos hablado antes de lo poco que hay que fiarse de lo «evidente», pero además es que, claro, una esfera y una rosquilla son cositas sencillas y que se pueden ver en tres dimensiones. Pero es que este resultado sirve para cualquier número de dimensiones, y a partir de 4 dimensiones las cosas ya no se ven, se describen mediante condiciones matemáticas, y ahí necesitamos ayuda para poder distinguirlas. El teorema de Poincaré es una ayuda fundamental.

La conjetura de Poincaré fue formulada en 1904 y poco más de 100 años más tarde, en 2006, Grigory Perelman, culminando los trabajos de muchos antes que él, la demostró. Fue el primer problema del milenio que quedaba resuelto. Y de momento, el único. Le correspondía el premio del millón de dólares y además la Unión Matemática Internacional le concedió la prestigiosa medalla Fields. Entonces Perelman saltó a las portadas de todos los periódicos del mundo, pero no precisamente porque toda la gente anduviera como loca con la conjetura de Perelman. No, corazón, la gente no abrió botellas de champán, no se bañó en fuentes públicas ni salió a tocar el claxon de sus coches y gritar alborozados por las calles. Esto es uno de los problemas del milenio, no uno de los mensuales partidos de fútbol del siglo. La noticia no era la resolución de la conjetura de Poincaré, la noticia era que el bueno de Grigory rechazó tanto el millón de dólares como la medalla Fields. ¿Cómo? Un ruso de pelo largo, que vive con su madre y al que no le sobra precisamente el dinero, ¿rechaza un millón de dólares y el premio más prestigioso en matemáticas, que le habría abierto las puertas que él hubiera querido? Eso sí es noticia de portada. Faltó tiempo para llamarle «genio loco» y mil cosas más, mucha gente le criticó e incluso le compadeció. No conozco a Perelman, ni yo hubiera hecho lo mismo que él, seguramente. Pero su decisión me hizo pensar. Sus argumentos para ambos rechazos eran coherentes. Él decía, y con razón, que la resolución de la conjetura de Poincaré no había sido cosa sólo suya, que él se apoyó en los trabajos de otra gente

que merecían tanto el premio y la medalla como él. Pero los comités que otorgan el premio y la medalla se lo dieron a él, y habría sido completamente legítimo que hubiera aceptado. Estamos en un mundo que adora por encima de todo el dinero y la fama. Perelman no entra en esos parámetros y por eso llama la atención. No estoy seguro del todo de si fue esa forma, quizá exagerada, de honestidad la que le hizo rechazar los premios, y no sé si la postura de Perelman es admirable o curiosa. Pero tanto su logro como el rechazo a los premios es una llamada a pensar en cuáles son nuestras prioridades como sociedad. Quizá llegue un día en que sí que la gente celebre la consecución de un premio Nobel o la solución de uno de los problemas del milenio como se celebra la victoria en un torneo de fútbol que se juega todos los años.

He dejado para el final la joya de la corona: la hipótesis de Riemann. Es un problema de unos 150 años de antigüedad. La hipótesis de Riemann ya estaba en la lista de los 23 problemas de Hilbert, y es el único de esos 23 que forma parte de la lista de problemas del milenio. Es un lugar común entre los matemáticos decir que es el problema más importante de todos, el que todo el mundo quisiera ver resuelto. Es muy curiosa una anécdota del gran Godfrey Hardy, uno de los grandes matemáticos del siglo xx, que tiene que ver con este problema, que él sí consideraba como el más importante de las matemáticas. Hardy era un ateo muy particular, ya que consideraba (un poco por fastidiar a sus amigos creyentes) que Dios era su enemigo personal. Se dice que una vez que volvía a Inglaterra desde Dinamarca, donde estaba visitan-

do a su amigo Harald Bohr (hermano del físico Niels Bohr), tenía que coger un barco pequeño que al él le parecía (y con razón) que era poco seguro para atravesar el mar del Norte. Así que escribió una postal a Bohr diciendo que había demostrado la hipótesis de Riemann. Él consideraba esa postal su seguro de vida, ya que Dios, su enemigo, no iba a permitir que Hardy muriera y todo el mundo pensara que efectivamente había demostrado la hipótesis de Riemann llevándose la demostración al fondo del mar y pasando para siempre a la leyenda. El truco funcionó y Hardy llegó sano y salvo (y el resto de pasajeros también, claro). No es el único gran matemático que pensaba en la hipótesis de Riemann como el problema más importante de las matemáticas. Unos años antes, David Hilbert, el de los 23 problemas, respondió al ser preguntado por el tema que si él resucitara al cabo de 500 años lo primero que preguntaría sería si alguien ha resuelto la hipótesis de Riemann.

¿De qué va esto? ¿A qué viene tanta expectativa? El enunciado de la hipótesis de Riemann es de esos que le dejan a uno frío:

La parte real de cualquier cero no trivial de la función zeta de Riemann es ½.

Así visto, la verdad, no parece muy excitante, de hecho no se entiende mucho, ¿no? Por aclarar un poco, la función zeta de Riemann es una suma infinita de números racionales. La fórmula es la siguiente:

$$Z(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

Complicado, ¿no? A cada número *s* la función zeta le asocia el resultado de una suma de infinitos términos. Y encima el número *s* puede ser cualquier número complejo, sí, los que vimos en el capítulo sobre números, esos de la forma *a* +*bi*, donde *i* es la raíz cuadrada de -1, ¿te acuerdas? Bueno, pues en lugar de *s*, colocas un número complejo cualquiera, y al hacer esa suma de infinitos términos (que se puede hacer, hay formas rigurosas de hacer esas sumas) te da como resultado un número. Bien, pues si para un *a*+*bi* el resultado que te da al hacer la suma esa infinita es cero, se dice que *a*+*bi* es un cero de la función de Riemann. Resulta que para todos los números donde *a* es un entero par negativo (-2, -4, -6…) y *b* es 0, entonces la suma infinita, la función zeta de Riemann, vale 0. Ésos son los que se llaman ceros triviales. Y cualquier otro número complejo *a*+*bi* tal que la función zeta valga cero, se llama un cero no trivial. Riemann calculó todos los que pudo y vio que para todos ellos, la parte real, la *a* del *a*+*bi*, valía exactamente ½. De todas las infinitas posibilidades para el valor *a*, en todos los casos en los que la función zeta vale 0, resulta que *a* vale ½, al menos en los casos que Riemann pudo calcular. Y pensó que estaría muy bien que fuera así siempre. Que siempre que la función zeta valga cero para un número complejo *a*+*bi*, entonces la parte real, la *a*, valiera exactamente ½. Y ésa es la hipótesis de Riemann.

Entiendo que ahora mismo mantienes la cara de perplejidad, pensando: ¿y por qué es eso tan importante? Es una cosa curiosa, hasta ahí es fácil de admitir, pero, bueno, no pasa de ahí, ¿no? Una curiosidad complicada, pero una curiosidad a fin de cuentas. Bueno, pues resulta que la función zeta de Riemann está estrechamente vinculada con los números primos. Y los números primos son a la vez las piezas fundamentales de las matemáticas, y su mayor misterio. Son las piezas fundamentales porque a partir de ellos se construyen de forma única todos los números, y son su mayor misterio porque pese a llevar milenios buscándola, nadie conoce una fórmula para la distribución de los números primos. Lo cual es frustrante, realmente, y además las consecuencias de una fórmula de ese tipo serían enormes. Cientos o miles de resultados matemáticos dependen de algo así. Incluso aplicaciones en física, en criptografía y en otras áreas dependen de esa distribución. La resolución de la hipótesis de Riemann nos daría una idea muy ajustada de la distribución de los números primos. Por eso es un problema tan fundamental.

Ya ves que lo tiene todo: es un problema complicado, lleva mucho tiempo sin resolverse, y encima es de esos que explicarían el mayor misterio de las matemáticas, los números primos, relacionándolo con cientos de otros resultados en muchas áreas de las matemáticas. Con razón se considera el problema más importante de las matemáticas. No es ninguna exageración.

Las matemáticas siguen adelante, avanzando. Muchas veces los progresos se dan en forma de solución a los problemas

que nos planteamos, pequeños o grandes. Otras veces los avances surgen de lo que inventamos en los intentos de solución, consigan su objetivo o no. Todos los días se resuelven pequeños problemas, se van dando pasos minúsculos pero importantes. A veces se dan avances espectaculares porque se solucionan problemas antiguos o importantes, como la demostración de Wiles del teorema de Fermat o la de Perelman respecto de la conjetura de Poincaré. Pero si algo quería dejar claro en este capítulo es que la mejor forma de avanzar en matemáticas es plantear problemas interesantes. Problemas fructíferos no solamente por lo que supondría su solución, sino porque en los caminos que llevan a ella, en los intentos fallidos, se descubren o inventan nuevas matemáticas que van completando nuestro conocimiento y haciéndolo más claro. Es verdad, los matemáticos tenemos muchos problemas, y nos gustan. Nos gustan porque sabemos que son la mejor forma de avanzar.

Te dejo un par de ejercicios que tienen que ver con los problemas que hemos visto en este capítulo, por si te apetece jugar un poco.

Ejercicio 1: Prueba que existen infinitas ternas pitagóricas.

Ejercicio 2: Demuestra que si la conjetura de Goldbach es cierta, entonces la conjetura «débil» de Goldbach también lo es.

9.
¡A jugar!

A todos nos gusta jugar. Todos aprendemos jugando, sobre todo de pequeños. De alguna manera seguimos jugando toda la vida, aunque conforme nos vamos haciendo mayores, la mayoría dejamos de jugar, o al menos cambiamos el tipo de juegos que nos gustan. Cuando somos pequeños los juegos lúdicos, los de jugar por jugar, tienen un peso más importante, y cuando somos mayores son los juegos competitivos los que más nos gustan. Y en ellos lo que más nos gusta es ganar. Eso de que lo importante es participar está muy bien, pero ganar mola más. Además, el que gana también participa, ¿no? Pues ya está. Lo que desde luego casi nadie tiene en la cabeza es que «jugar», «divertirse» y «matemáticas» vayan juntas en la misma frase. Quizá con la excepción de los sudokus, es verdad, que tuvieron su momento de gloria y mucha gente se dedicó a hacer numeritos en el tren o en la sala de espera del médico. Pero, vamos, que los sudokus, siendo entretenidos como son, no son una locura de diversión desenfrenada tampoco, eh.

En este capítulo vamos a hablar de juegos y matemáticas. Existen juegos matemáticos, muchos, algunos muy entretenidos, bastante curiosos y muy divertidos. Pero es que, además, las matemáticas se dedican muchas veces a buscar la mejor solución a los problemas que se plantean, y claro, cuando se trata de jugar, ¿cuál es la mejor solución?: ganar, ganar, ganar y volver a ganar. Así que muchas veces las matemáticas se dedican a encontrar estrategias ganadoras en juegos. Sigue adelante en este capítulo y encontrarás formas de entretenerte con las matemáticas, de aprender jugando, y además, de ganar a quien quieras. Tu matemático interior es un buen aliado en esto. Déjame detenerme un poco aquí para decirte que jugar es una cosa seria, matemáticamente hablando. Existe un área muy importante en las matemáticas, llamada teoría de juegos, que tiene muchas aplicaciones, desde la biología hasta las ciencias de la computación, y particularmente en economía. La teoría de juegos ayuda a tomar decisiones cuando hay distintos participantes buscando cada cual su propio beneficio o el beneficio común. Es un área apasionante.

Hay otra parte de las matemáticas que se llama «matemática recreativa», y es la que se dedica a estos problemas que son juegos, que no tienen más sentido que el de jugar, entretenerse, divertirse, que no tienen una utilidad declarada. Tiene algunas relaciones con la teoría de juegos, pero son dos cosas diferentes. A estas alturas tú ya te has dado cuenta de que la utilidad de cualquier cosa en matemáticas puede estar oculta y no aparecer en mucho tiempo, uno nunca sabe

para qué puede servir algo, y puede que cosas que parezcan inútiles luego resulta que tienen grandes aplicaciones. Pero, bueno, eso nos da igual en este caso, por eso digo que no tienen una utilidad «declarada» más allá de la de servir de estímulo al cerebro y pasar el rato. Algo así como los juegos a los que jugamos de pequeños.

Si hay una persona en la historia que ha destacado por su labor en torno a las matemáticas recreativas, ése fue Martin Gardner. De él se ha dicho que contribuyó «a convertir a miles de niños en matemáticos y a miles de matemáticos en niños». Y no se puede decir nada mejor de alguien como Gardner. Durante más de 30 años tuvo una columna sobre matemáticas recreativas en la revista *Scientific American*, escribió miles de páginas, montones de libros, inventó cientos de juegos y fue un curioso incorregible y contagioso. A Gardner le habría encantado que las matemáticas recreativas tuvieran un papel mayor en la enseñanza de las matemáticas. A mí también. Creo que jugando podemos aprender la mayoría de las «capacidades» que la enseñanza de las matemáticas contribuye a que adquiramos. Jugando podemos ejercitar el pensamiento abstracto, el razonamiento lógico, los mecanismos de deducción tan propios de las matemáticas, el reconocimiento de patrones, de esquemas, la generalización... Y eso sin odiar de por vida lo que estamos haciendo, sino alentando la curiosidad y generando placer y satisfacción. Yo no le veo más que ventajas, la verdad. Pero, bueno, dejémonos de hablar tanto y vamos a jugar con las matemáticas.

Muchos de los juegos matemáticos que podrás ver en los libros tienen que ver con ajedrez o con cartas, y son solitarios, juegos para un solo jugador. Vamos a empezar con un ejemplo de ésos, para abrir boca.

Éste es probablemente el juego de ajedrez más famoso de la historia. Se llama el juego de las ocho reinas, y consiste en colocar ocho reinas en un tablero de ajedrez, de forma que ninguna de ellas amenace a las otras. Toma papel (si tienes papel cuadriculado, mejor) y un bolígrafo o un lápiz, y vamos a jugar con cabeza. Hay dos formas de jugar a esto: como cualquier persona, o como un matemático. ¿Cómo jugaría cualquier persona? Pues nada, coges el tablero, las reinas (o papel y boli) y a probar. Es entretenido y te puedes pasar buenos ratos hasta que descubras alguna solución, si es que la descubres. En este punto es importante decir que sí que existe solución, de hecho, hay varias diferentes. Deja ahora el libro, intenta un rato (o más) y vuelve después. Como pasa muchas veces en este libro, vas a sacar más provecho de lo que viene ahora si antes has intentado jugar a tu aire, intentando y quizá consiguiendo colocar las ocho reinas. Al ir intentándolo, pronto te darás cuenta de varias cosas, incluso crearás tus propias estrategias. Va, dale un rato, yo te espero aquí, no tengo prisa. No hagas sólo dos intentos por compromiso, inténtalo en serio, anda.

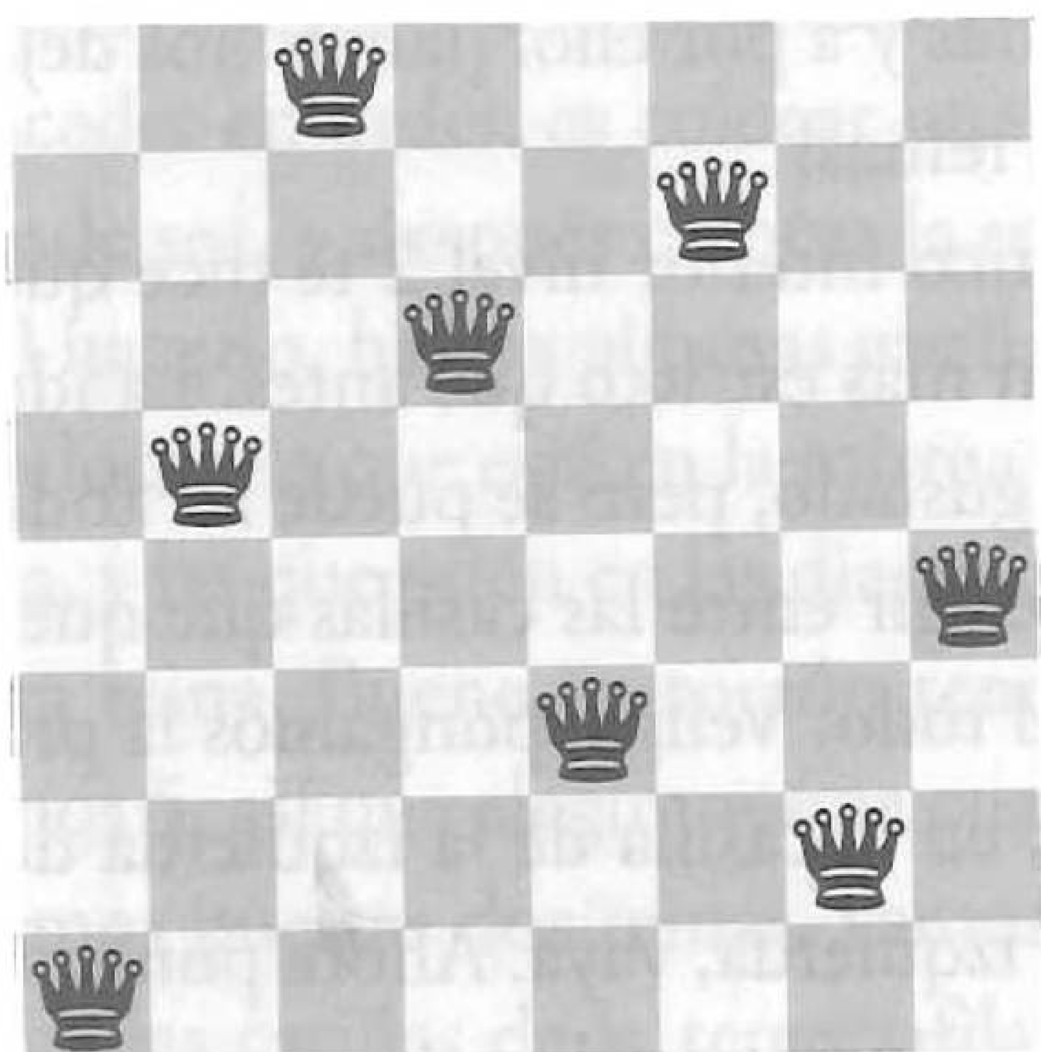
¿Has jugado? ¿Lo has intentado? Espero que sí. No sé qué clase de intentos has hecho, si has alcanzado la solución o no. Normalmente, nuestro matemático interior (que sí, que todos lo tenemos, aunque pensemos que somos per-

sonas normales) nos dice que procedamos en orden. Hay distintas formas de ser ordenado, pero una que nos puede servir es la siguiente: uno se da cuenta claramente de que no puede haber dos reinas en la misma fila, así que una buena forma de proceder en orden es colocar una reina en la primera fila, donde sea, y después colocar la segunda en la segunda fila. Al hacerlo, hay ya algunas casillas en las que no la podemos colocar: la que esté en la misma columna que la reina de arriba, y las que estén en las diagonales amenazadas por la primera reina. Bueno, pero aún tenemos varias opciones, al menos 5, así que elegimos una cualquiera de ellas. Bien, ya tenemos puestas dos reinas, vamos con la tercera. Ves que hay varias casillas de la tercera fila que están prohibidas, ¿verdad? Las columnas de las dos reinas anteriores y las diagonales amenazadas por ellas. Pero aún hay hueco para la tercera reina... Muy bien, podemos seguir así hasta que pase una de estas dos cosas: una, que lleguemos a la octava fila, en donde, si nos queda alguna casilla no amenazada, podremos poner la octava reina y habremos ganado. Y dos, que en alguna de las filas ya nos haya sido imposible colocar a la reina correspondiente, que no nos quedaran casillas libres de amenaza al llegar a la quinta, la sexta, la séptima o la octava fila. Lo más común es que te hayas encontrado en esta última situación. Si tu matemático interior es normal, y si no te rindes fácilmente, pues nada, toca volver a empezar, probando otra casilla de inicio, o dejar las primeras igual y probar algún cambio más adelante, no sé. Pero si tu matemático interior es de los muy ordenados,

también puedes usarlo para hacer estos «reintentos» en orden, de forma sistemática para asegurarte de que no incurres en repeticiones y que vas procediendo de forma exhaustiva. Remanguémonos y a por ello. ¡Jamás nos dejaremos vencer por estas ocho reinas!

Tu matemático interior nivel 2 te dice que hagas las cosas en un orden más estricto que antes. La idea de proceder fila a fila le ha gustado, pero se puede ser todavía más ordenado, eso de «elegir entre las casillas que queden libres» no le convence del todo. Venga, pongamos la primera reina en la primera fila, en la casilla de la izquierda del todo. La esquina superior izquierda, vaya. Ahora pongamos la segunda reina en la segunda fila, en la primera casilla que quede libre, empezando por la izquierda. Aquí ya no eliges nada. Si hay alguna libre, eliges la primera que quede y ya está. Orden ante todo. Al llegar a la tercera fila, procedemos igual, y así fila por fila. Llegará un momento, hazlo y comprobarás que es en la sexta fila, en que no puedes colocar a la reina en ningún sitio. Así que hay que volver a empezar, pero esta vez hagámoslo por orden. Ve a la última fila en que pudiste elegir dónde ponías la reina y cambia la posición de la reina a la siguiente casilla libre hacia la derecha. Y adelante con las siguientes filas de nuevo. Si vuelves a llegar a un atasco, otra vez vas a la última fila donde pudiste elegir en dónde ponías la reina, la colocas en la siguiente casilla libre hacia la derecha, si es que hay (si no, vas una fila para arriba hasta que puedas modificar la posición de alguna reina) y a continuar a partir de ahí. Puede ser que en algún momento tengas que

Figura 1: Una forma de colocar las ocho reinas de forma que no se ataquen mutuamente.



volver hasta la primera fila, mover a la reina de la esquina hacia la derecha, y volver a empezar. Siguiendo este método te aseguras de que pruebas con todas las posibilidades existentes hasta que alguna funcione. Sólo hace falta un poquito de paciencia, ser metódico anotando las posiciones de las reinas que ya has intentado, y la solución aparece enseguida. Tu matemático interior está orgulloso de ti.

Antes he dicho que una de las formas de jugar es siendo una persona normal. La otra es jugar como un matemático, ya sabes: generalización, abstracción... y orden, eso por descontado. Una vez que ya queda resuelto el problema de las ocho reinas, que ya se sabe que existe al menos una solución, el matemático se pregunta cuántas soluciones distintas hay,

y de ellas, cuántas y cuáles son transformaciones simétricas unas de otras, porque, claro, una vez que tienes una solución, si pones las reinas de forma simétrica con respecto a una línea vertical por el centro del tablero, tienes otra solución, y si haces lo mismo con respecto a una línea horizontal por el centro del tablero, tienes otra solución... Vamos, que un matemático no se contenta con saber que hay solución, quiere saber cuántas. Y resulta que hay 92 soluciones, de las cuales 12 son esencialmente distintas, el resto son «transformaciones» de alguna de estas 12. ¿Contentos, matemáticos? Aún no. ¿Y si en lugar de un tablero de 8x8 casillas con ocho reinas jugamos a colocar *n* reinas en un tablero de *n*x*n* casillas? Jeje, esto tiene todavía más interés. Veamos: si *n* es 1, sólo hay una solución, está claro. Si *n* es 2, fíjate que no hay solución posible, las pongas como las pongas, estas dos reinas se atacan entre ellas, el tablero de 2x2 es demasiado pequeño para ellas. ¿Qué pasa con 3 reinas en un tablero 3x3? También se ve fácilmente que no hay solución. Si *n* es 4 hay una solución (bueno, dos pero una es «espejo» de la otra). Y así podemos seguir. Cuando el tablero va creciendo se va haciendo más difícil contar las soluciones a mano, imagínate para un tablero de 20x20 casillas. El método del orden que te he contado funciona, sí, pero ¿quién tiene la paciencia de recorrer todas las posibles configuraciones de 20 reinas en un tablero tan enorme? Los ordenadores. Los ordenadores sí. Podemos hacer un algoritmo que recorra todas las posibilidades y nos diga cuáles y cuántas son soluciones al problema de las *n* reinas, y podemos programarlo

en un ordenador. Pasar del problema de las 8 reinas al de las *n* reinas es una generalización (hay otras muchas, podemos pensar en tableros de *n* dimensiones, en tableros esféricos, etc., pero no vamos a venirnos arriba con las generalizaciones). Y esto es importante para el objetivo de este libro: aprender cómo funciona la inteligencia matemática. La generalización es un mecanismo central en matemáticas, ya lo sabes. El orden, el procedimiento metódico también es importante para los matemáticos, y ahora que queremos hacer un algoritmo, necesitamos de nuevo el otro de los elementos esenciales de los que ya hemos hablado: la abstracción. Porque no podemos programar nuestro algoritmo con dibujitos de reinas y mucho menos con reinas y tableros físicos. El ordenador sólo entiende de ceros y unos, o de números, si quieres, que son fáciles de traducir a ceros y unos. Así que deberíamos traducir nuestro problema a un problema de números. Un poco de abstracción. Quedémonos con las 8 reinas. Vamos a pensar en una lista de 8 números, cada uno de ellos representará una fila, y cada uno de los números puede ir del 1 al 8, e indicará la casilla de esa fila en la que colocamos la reina. Por ejemplo, ésta sería una lista de reinas: (4, 7, 3, 8, 2, 5, 1, 6). O sea, la reina de la primera fila está en la cuarta casilla, la de la segunda fila en la séptima, la de la tercera fila en la tercera, etc. Si te fijas, esta configuración es una solución al problema. Bien, pues ya tenemos una forma (abstracta) de representar las posiciones de las reinas. El algoritmo lo tenemos claro, consiste en seguir el orden que te he contado antes. Así que ya sólo nos falta representar con

los números las condiciones para que una configuración sea correcta. Como cada reina tiene que estar en una columna diferente a las demás, en nuestra lista de números no puede haber números repetidos (si ya hemos puesto el 1, no puede haber otro 1, no va a haber dos reinas en la primera columna), así que trabajaremos todo el rato con reordenaciones de los números del 1 al 8. Y luego está lo de las diagonales. Eso es más difícil, pero tampoco es ninguna locura: si sumas la fila y la columna de dos reinas y el resultado es el mismo eso es que están en la misma diagonal, y si restas la fila de la columna y da lo mismo, también están en la misma diagonal (hay diagonales «ascendentes» y «descendentes»). Pues ya está, con eso podemos programar nuestro ordenador para que recorra todas las posibles configuraciones y detecte cuáles son válidas y cuáles no. Hemos transformado el problema de las reinas en encontrar reordenaciones de los números 1 al 8 (en matemáticas eso se llama «permutaciones») que cumplan unas ciertas condiciones: lo de las diagonales.

Párate un momento y mira todo lo que hemos usado para ponernos «matemáticos» con este juego: hemos actuado de forma ordenada, metódica, hemos hecho generalizaciones, e incluso hemos hecho una versión abstracta del problema, con números, que nos permite programarlo en un ordenador. Créeme, en el mundo somos muchos los matemáticos que seguimos exactamente esa cadena metodológica en nuestro trabajo, sólo que en lugar de al problema de las reinas, lo aplicamos a problemas teóricos de las matemáticas o a sus aplicaciones prácticas en todos los ámbitos de la ciencia o la

tecnología. Ya sabes exactamente cómo trabajamos muchos de nosotros.

Pero hay una cosita más, y te prometo que ya dejamos tranquilas a las reinas. Vale, hemos hecho el programa, pero ocurre que el número de operaciones que el pobre ordenador va a tener que hacer conforme aumente el tamaño del tablero, y con él el número de reinas, va a ser increíble. Para un tablero de tamaño 20, son literalmente trillones de operaciones. Enseguida va a ser impracticable para cualquier ordenador actual, incluidos los supercomputadores. ¿Está todo perdido? No, todavía no, hay una herramienta muy poderosa en la mente de los matemáticos: la búsqueda de patrones. Uno puede ponerse a investigar alguna fórmula de solución que sea válida siempre, y que nos evite andar tanteando por todas las posibilidades. Hay quien se ha puesto a buscar estos patrones y los ha encontrado. Existe una solución a este problema de las n reinas que depende de lo que te dé el resto de dividir n entre 6. Si te da 2, hay un tipo de solución, si da 3, otra diferente, y si da otro resto (puede ser 0, 1, 4 o 5), hay otra solución diferente. Vamos a mirar la solución de los números n que divididos entre 6 dan resto 2, o sea, el 8, el 14, el 20, etc. La colocación de los números 1 al n en la solución es la siguiente: pones primero todos los pares, luego los impares, intercambias el 1 y el 3, y colocas el 5 al final. Y ya está. Eso es una solución del problema. Da igual lo grande que sea el n mientras dé resto 2 al dividirlo entre 6. Mira, por ejemplo, para n=8, nuestro problema original, la solución sería (2, 4, 6, 8, 3, 1, 7, 5), compruébala si quieres. Para n=14 sería (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 1, 7, 9, 11, 13, 5) y así siempre. Alucinante. Simple y efectivo, ahora no hay que andar buscando todas las posibilidades, basta colocar los pares, los impares, y hacer un par de cambios. Y funciona siempre.

La búsqueda de patrones nos permite encontrar algunas soluciones, no todas, pero, eso sí, para cualquier tamaño de tablero. El programa de ordenador que hemos pensado nos da todas las soluciones, pero sólo para tableros más o menos pequeños, para los grandes es demasiado costoso. Lo ideal sería tener una fórmula que nos diera el número de soluciones para cualquier tamaño de tablero y encima poder escribirlas todas. Pero aunque se ha intentado, todavía no se ha encontrado ninguna fórmula así. De modo que tenemos delante nuestro un problema abierto, una de esas cosas que a los matemáticos nos gustan tanto. Un misterio por resolver. Ya ves todo lo que hemos recorrido tratando de poner ocho reinas en un tablero de ajedrez, y la historia, por lo visto, aún no ha terminado.

Hay miles de juegos matemáticos, o por decirlo de otra forma, hay miles de juegos a los que puedes jugar con tu matemático interior. Cuanto más entrenado lo tengas, más posibilidades interesantes encontrarás detrás de cada juego. No sería justo dejar pasar la ocasión de proponerte un enigma lógico (sencillo esta vez) con el que puedas experimentar el ejercicio interior de enfrentarte a una situación en la que la lógica más elemental se transforma en un jueguecillo. Este problema se debe a Raymond Smullyan, que escribió una

bonita colección de problemas de lógica recreativa titulado *¿Cómo se llama este libro?*

Tenemos que Porcia, el personaje de Shakespeare, quiere entregar a su pretendiente un retrato suyo. Pero para hacerlo más interesante, le presenta tres cofrecitos, uno de oro, otro de plata y otro de plomo. En uno de ellos está el retrato, y si el pretendiente adivina cuál es, Porcia se casará con él. Como Porcia no quiere dejar el casamiento a la buena o mala fortuna de su pretendiente, cada cofrecito tiene una inscripción que le servirá de pista. Porcia quiere un pretendiente que sepa pensar con lógica, bien por Porcia. Las inscripciones de los cofrecillos son las siguientes:

- El cofrecito de oro tiene escrito: «El retrato está en este cofre».
- El cofrecito de plata tiene escrito: «El retrato no está en este cofre».
- Y el cofrecito de plomo tiene escrito: «El retrato no está en el cofre de oro».

Finalmente, Porcia da una pista más a su pretendiente, que resulta definitiva: «A lo sumo, una de las inscripciones es verdadera». El hábil pretendiente de Porcia sonríe al oír esto e inmediatamente (bueno, o tras pensar un poco) abre uno de los cofres, en el que efectivamente estaba el retrato, y se casa con ella. ¿En qué cofre estaba el retrato?

Te dejo ahora que lo pienses un rato. No es difícil en realidad, pero como la mayoría de la gente no estamos acostumbrados a utilizar conscientemente los «circuitos lógicos» de nuestra cabecita, igual al principio notas que tienes que desengrasarlos y te cuesta un poco. No pasa nada, te espero otra vez, la satisfacción de resolver estas cosas por uno mismo recompensa con creces el esfuerzo realizado.

Bueno, espero que hayas podido adivinar que el retrato está en el cofre de plata. El razonamiento lógico que te lleva de forma inequívoca a la respuesta es el siguiente: Porcia ha dicho que como mucho una de las inscripciones es verdadera, pero si te fijas, las inscripciones del cofrecito de oro y del de plomo son contradictorias, así que no pueden ser las dos verdaderas a la vez, pero tampoco las dos falsas a la vez. Una de ellas es verdad. Eso hace que la inscripción del cofre de plata sea necesariamente falsa, porque la bella Porcia nos ha dicho que a lo sumo una de las tres inscripciones es verdad. Por lo tanto, el retrato está en el cofre de plata. Y de paso, sabemos que la inscripción verdadera es la del cofre de plomo, ya que si la que es verdadera era la del de oro, tendríamos dos retratos, y eso sí que no.

Algunas personas se sienten un poco confundidas con este jueguecillo, porque confunden «el cofre que dice la verdad» con «el cofre que tiene el retrato». Para la mayoría, manejar a la vez tres o cuatro enunciados lógicos es un poco lioso, y pronto se sienten tentados de abandonar, se «bloquean». Se necesita un esfuerzo para manejarse con varios enunciados lógicos a la vez. El caso de los retratos no es especialmente duro, pero es lo suficientemente duro como para bloquear a muchas personas. Y sin embargo, ésta es una situación que

se da con mucha frecuencia en el trabajo en matemáticas, y en la vida en general. Estar entrenado en el pensamiento lógico es muy útil en muchísimas situaciones, no sólo en matemáticas. Hay un punto sutil aquí que me gustaría compartir contigo, y es que ese uso del pensamiento lógico es distinto cuando se trata de matemáticas que cuando se trata de la vida en general. Y esa diferencia hace que las matemáticas sean un buen entrenamiento para usar el pensamiento lógico en la vida. Me explico. En matemáticas nos vemos muchas, muchas veces en la situación de los cofrecitos de Porcia: se manejan a la vez dos, tres o cuatro enunciados lógicos a la vez, y la veracidad de algunos es incompatible con la de otros, o las relaciones lógicas entre ellos son enrevesadas, como pasaba con las inscripciones de los cofrecitos. ¿Qué hacemos entonces? Orden y abstracción. Proceder con orden, añadiendo las pequeñas piezas de información una a una de modo que el conjunto que vaya quedando sea compatible, y si tenemos varias opciones para que así sea, explorar en orden cada una de esas opciones, igual que hacíamos con las reinas, ¿te acuerdas? Sólo que ahora hablamos de enunciados lógicos. Si no lo hacemos así, el problema se adueñará de nosotros, perderemos la claridad sobre qué enunciado es compatible con cuál otro y tendremos que volver al principio, pasando muchas veces por la tentación de dejarlo o por el peligro del bloqueo, como le pasa a mucha gente con los retratos de Porcia. Y luego la abstracción. Los objetos matemáticos ya son suficientemente abstractos, pero siempre intentamos manejarlos completamente desprovistos de sus

particularidades. Si el hecho de que sean reinas en un tablero o cofrecitos con un retrato no es relevante para la lógica del problema, quizá es mejor prescindir de esa información. Y tratar con números, o con letras o símbolos que representen esos enunciados. Muchas veces hacemos esquemas, dibujos que representan esos objetos y sus relaciones. Y entonces se puede pensar en lo que realmente significa el problema (a nivel lógico) y se puede avanzar. En las situaciones habituales de nuestra vida personal, de nuestra vida laboral o lo que sea, no siempre podemos utilizar el pensamiento lógico de esa forma, porque hay componentes que no se someten a la lógica, al orden y a la abstracción. Pero la inmensa mayoría de las veces sí que podemos, o podríamos, aunque no lo hagamos. Y entonces podemos aplicar los mismos principios de orden y de abstracción que acabamos de ver. Normalmente, la diferencia entre los problemas matemáticos y los problemas «de la vida» es que estos últimos tratan de objetos y situaciones más complejas, pero con menos relaciones lógicas implicadas entre sí. Problemas de planificación, de distribución, de logística (que son en realidad la mayor parte de los que afrontamos cotidianamente) se benefician de proceder con esos principios de orden y abstracción. Sin pasarse, eso sí, que hay componentes a veces que no se pueden reducir a la lógica (seguro que Porcia estaba pensando en otras cosas además de las capacidades lógicas de su pretendiente a la hora de elegir casarse con él).

Al comienzo del capítulo te decía que lo de participar en los juegos y tal está muy bien, pero que ganar está mucho

mejor. Es hora de aprender a ganar. Lo primero que tengo que decirte es que en los juegos de azar puro, las matemáticas dan igual, no hay nada que hacer, es cuestión de suerte y ya está. No hay una fórmula matemática para ganar a la lotería ni al euromillón, lo siento. Pero en todos los demás, desde el Monopoly al baloncesto, tener algo de matemático (ya vas entendiendo lo que significa eso de «algo de matemático»: orden, abstracción, generalidad, búsqueda de patrones) te da ventaja, puedes adquirir un conocimiento del juego que te permita ponerte en mejor posición de ganar. Vamos a ver unos ejemplos sencillos de estrategias ganadoras en juegos, para que te hagas idea de lo que estoy hablando.

Empecemos con el tres en raya (en inglés le llaman tic-tac-toe). Es un juego que, honestamente, me parece un rollo. No entiendo la fama que tiene, la verdad. Todo el mundo ha jugado alguna vez en su vida, hay tableros de mil formas y colores, incluso aplicaciones de móvil y ordenador para jugar al tres en raya. ¡Pero si siempre se empata! A no ser que sea la primera vez que juegas, que tengas menos de 8 años o que alguno de los oponentes esté totalmente despistado, ese juego acaba siempre en empate. Y se puede demostrar, es fácil, además. Comienza uno de los jugadores, y a no ser que no haya jugado jamás, lo que tiene que hacer es colocar su ficha en la casilla central del tablero. Vale, ahora el segundo jugador la coloca en una de las esquinas, da igual en cuál. Y a partir de ahí lo único que tienen que hacer ambos oponentes es ir tapando las posibilidades de ganar que vaya construyendo el otro oponente. Cada vez que el otro

tenga dos en raya, coloco mi ficha en la tercera casilla de esa fila, columna o diagonal, y ya está. A no ser que seas muy despistado, eso es un empate seguro (y digo «seguro» en el sentido más estricto y más matemático de la palabra). Es decir, al tres en raya se puede jugar de una forma perfecta, y si ambos contendientes juegan de forma perfecta (imagínate a dos ordenadores que hayan sido programados para jugar de forma perfecta), el juego acaba en empate. Lo que yo te decía, un rollo.

Hay juegos más interesantes, como por ejemplo las damas. Ahí ya tienes más fichas, más casillas, las posibilidades del juego son mucho mayores, hay más variación. Es más complicado y, por lo tanto, más divertido que el tres en raya. Y sin embargo, también se puede jugar de modo perfecto. Y si se juega perfecto, el juego acaba en empate. No es tan fácil, pero se puede. Esto está demostrado matemáticamente, increíble pero cierto. Un matemático de Canadá llamado Jonathan Schaeffer analizó todas las posibles jugadas del juego de las damas (le costó 18 años con ayuda de un ordenador) y en 2007 acabó demostrando que se puede jugar perfecto, y el resultado de cualquier partida perfecta es un empate. Si tienes curiosidad y quieres jugar contra un ordenador que tiene implementado el algoritmo de Schaeffer puedes hacerlo *online*, se llama Chinook.

Por supuesto, el ajedrez es más difícil aún que las damas, y para el ajedrez aún no se ha encontrado una forma perfecta de jugar. No se sabe si existe algo así. Hay ordenadores que juegan muy bien: ya en los años 90 un ordenador llamado

Deep Blue venció al campeón mundial Gari Kasparov, todo un hito en la historia de la inteligencia artificial porque nos hizo pensar de nuevo a qué llamamos inteligencia artificial.

Los ordenadores, como nosotros, pueden aprender a jugar. La inteligencia artificial, como la nuestra, utiliza el juego para desarrollarse, y los resultados que se logran son espectaculares. Deep Blue no aprendía mientras jugaba, pero estas cosas hoy en día han cambiado. Un grupo de investigación llamado Deep Mind ha desarrollado un algoritmo que es capaz de aprender a jugar a videojuegos igual que lo hacemos nosotros: practicando, jugando partidas. Lo entrenan con videojuegos de los años 80 (el Space Invaders, el Kung-Fu Master y cosas así) y ha conseguido aprender a jugar a nivel profesional a 49 juegos diferentes. Sus programadores y los miembros del equipo de investigación analizan su forma de aprender y lo aplican en otras situaciones en las que podemos aplicar sistemas expertos de decisión e inteligencia artificial. Créeme que son muchas las situaciones de ese tipo.

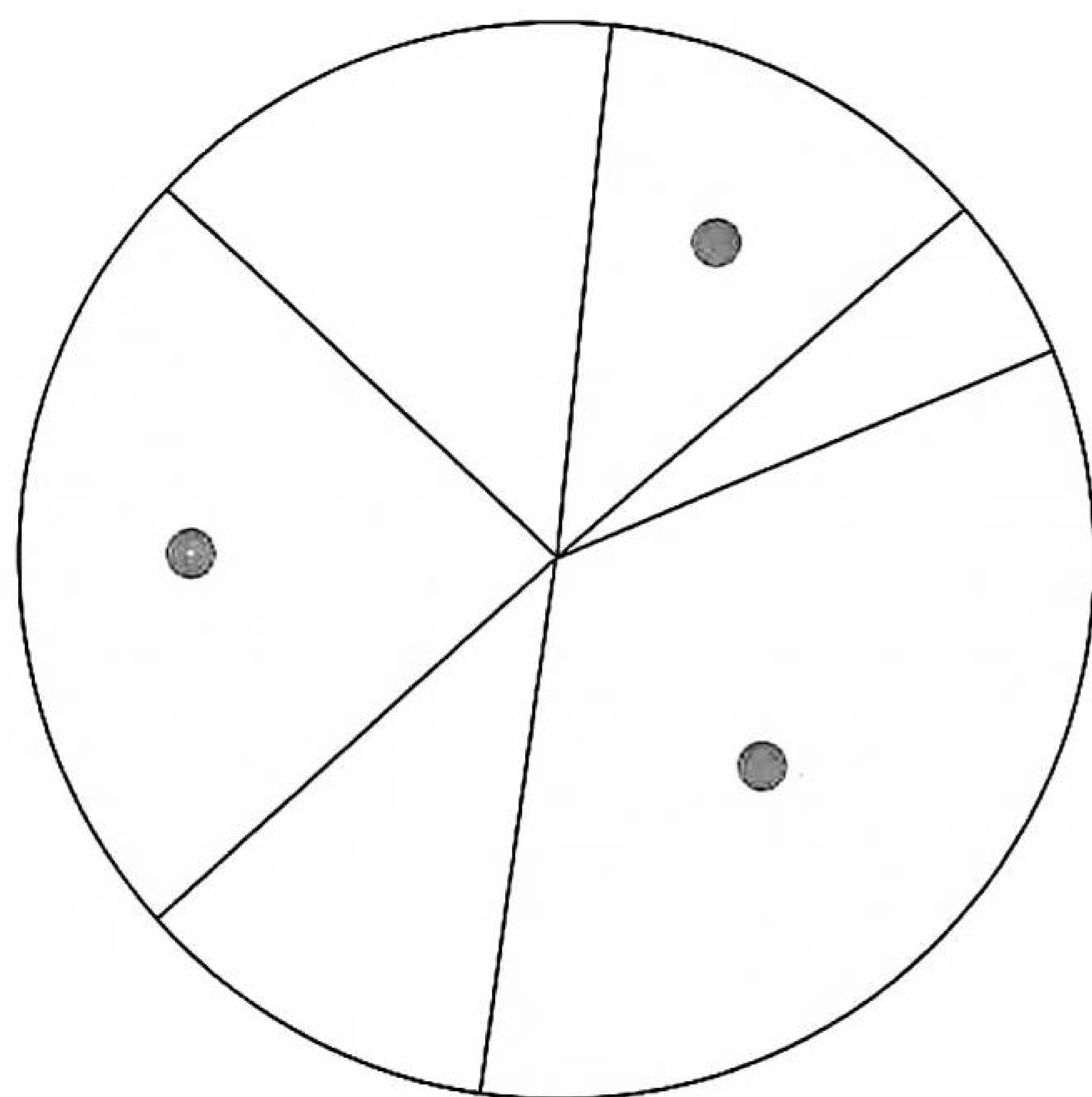
Ya ves, ocurre como con nosotros: el juego es una actividad fundamental para el aprendizaje, porque contiene en sí los mecanismos que luego utilizamos continuamente en nuestras vidas. Las matemáticas no son ajenas a esto.

No voy a retrasar más el cumplimiento de mi promesa de enseñarte a ganar. Te he dicho que íbamos a ver algún ejemplo sencillo y ya ha llegado el momento.

El primer juego que te voy a enseñar podríamos titularlo «cómo comer pizza gratis gracias a las matemáticas». Es un juego para dos jugadores. Llama a un amigo, una amiga, familiar o colega de trabajo. Compráis una pizza que os vais a comer entre los dos. Y vamos a jugar. Le dices que puede partir la pizza en el número de trozos que quiera, un número par, eso sí, para que los dos comáis el mismo número de trozos. Pueden ser trozos grandes, pequeños, unos grandes y otros pequeños, pueden ser dos trozos, cuatro, veinte, los que quiera. Y ahora comenzáis a comeros la pizza eligiendo trozos alternativamente, con dos reglas nada más: tu colega ha partido la pizza como le ha dado la gana, pues tú empiezas a elegir primero, ésa es la primera regla. La segunda es que sólo se pueden elegir trozos que estén junto al hueco, a la parte de la pizza que ya está comida, no se pueden coger trozos de cualquier parte de la pizza. El primer trozo elegido puede ser cualquiera, claro, que aún no hay hueco. Si tu colega consigue comer más pizza que tú, pagas la pizza. Si tú comes la misma cantidad de pizza que él o más, paga él. Claro, el caso de empate tiene que ir a tu favor para que tu contrincante no tenga ventaja, porque podría partir la pizza por la mitad, o en trozos iguales y así siempre comeríais lo mismo, eso le quitaría toda la gracia al juego.

Bien, pues ya lo tenemos. Este juego tiene una estrategia ganadora, se puede jugar perfecto, y si el primer jugador (o sea, tú) juega perfecto, gana siempre. Veamos cómo: tu colega ya ha partido la pizza. Hay un número par de trozos. Observa los trozos, y empezando por el que quieras, les vas asignando mentalmente, y alternativamente, un color. Rojo o verde, por ejemplo. Al primero le das el rojo, al segundo el verde, tercero rojo, cuarto verde… y así hasta que des la

Figura 1: Una pizza con seis trozos, coloreados alternativamente. ¿Qué conjunto cubre más pizza, los trozos con un circulito o los que no tienen nada?



vuelta a la pizza. Tendrás la mitad de trozos rojos y la otra mitad verdes. Y aquí viene lo importante: en uno de los dos colores hay tanta o más pizza que en el otro. Puede que los dos colores tengan la misma cantidad de pizza, o puede que uno de ellos tenga más.

Pongamos que el que más pizza cubre es el color verde, así que elegimos el verde. Si logras comerte todos los trozos verdes, has ganado (si los dos tienen igual, da igual el color que elijas). ¿Y eso se puede hacer siempre? Sí, eso es lo bueno. Como empiezas tú, eliges un trozo verde. Los de los lados serán los dos rojos, así que tu oponente se ve forzado a coger un trozo rojo. Perfecto, ahora tú puedes elegir uno

verde o uno rojo. Por supuesto, eliges el verde y le dejas de nuevo dos rojos a él para poder elegir, porque la regla dice que sólo se pueden coger trozos junto al hueco. Y así puedes seguir todo el rato, eligiendo siempre verde, y tu compañero forzado a elegir siempre rojo. Al final del juego tú te has comido todos los trozos verdes y él todos los rojos: has ganado. Lo haya partido como lo haya partido, en el número de trozos que quiera, de los tamaños que quiera. Siempre ganas.

Vamos con otro juego antes de dejarlo. Elige de nuevo a la persona con la que vas a jugar. Procura que no sea la misma persona que la de la pizza, porque le vas a ganar otra vez. Le dices a tu colega que saque unas cuantas monedas, o billetes, lo que quiera pero un número par de ellos. Los colocamos en fila. Pueden ser el número de monedas y billetes que él quiera, de los valores que él quiera, y le pides que los coloque en fila, como quiera, en el orden que quiera, déjale que sienta que tiene alguna posibilidad. Vale, comienza el juego. Vais eligiendo por turnos una de las monedas y billetes que hay en los extremos de la fila. Si él consigue acumular más dinero que tú, se lo queda todo. Si tú consigues acumular tanto o más que él, te lo quedas todo tú. De nuevo el caso de empate tiene que ir a tu favor, porque si no, puede poner dos monedas iguales y ya está.

¿Te das cuenta de cuál es la estrategia ganadora ahora? Este juego es «exactamente» igual que el de la pizza. Piénsalo un poco, verás como sí.

He dicho «exactamente» así, con comillas, porque aunque es evidente que no son del todo iguales, porque uno va

de pizzas y el otro de monedas en fila, matemáticamente sí que son lo mismo. ¡De nuevo, orden, abstracción y generalidad! Tenemos un conjunto de elementos con distintos valores, el número de elementos es par, así que lo podemos dividir en dos partes que tengan el mismo número de elementos, tomando los elementos alternativamente. Una de esas dos partes acumula tanto o más valor que la otra. A la hora de jugar, hay una regla que hace que el primer jugador pueda elegir todos los elementos del conjunto que tiene más valor. En el caso de la pizza, esa regla es que hay que tomar trozos junto al hueco. En el caso de las monedas, que hay que tomarlas de los extremos. Pero, en esencia, es lo mismo. La estrategia es la misma porque hemos podido reducir el juego a las mismas componentes, hemos podido hacernos una versión abstracta y trabajar con ella. Dejo a tu imaginación elaborar otros juegos con estas mismas componentes, pero con situaciones diferentes, seguro que puedes inventar otros juegos de este tipo.

Estoy completamente de acuerdo con Martin Gardner cuando decía que le gustaría ver más matemáticas recreativas, más juegos matemáticos en los centros de enseñanza, en la primaria y en la secundaria, en los libros de texto. En los juegos están muchas de las componentes del pensamiento matemático, y son fácilmente identificables. Muchos de los objetivos que tenemos al enseñar matemáticas están en las matemáticas recreativas: potencian la capacidad de abstracción, el razonamiento lógico, el uso de la generalidad, la búsqueda de patrones. No digo que sean la única forma

de enseñar estas cosas, pero desde luego creo que merecen mayor presencia de la que tienen. Parece que todavía no nos atrevemos a enseñar jugando y reflexionando sobre el juego.

Te dejo para terminar este capítulo con un par de juegos que pueden servirte para entretenerte mientras haces más fuerte a tu matemático interior.

Ejercicio 1: Ya has visto que se pueden colocar 8 reinas en un tablero de ajedrez sin que se ataquen unas a otras. Muestra que se puede hacer lo mismo con 32 caballos, o con 16 reyes o con 8 torres.

Ejercicio 2: Coloca 12 monedas en círculo. Búscate un oponente para este juego. Se trata de eliminar las monedas del círculo por turno. En cada turno se pueden eliminar una o dos monedas, con la única regla de que si quitas dos monedas tienen que estar juntas, por lo demás, las puedes quitar de donde quieras. Si quitas una sola moneda en tu turno no hay restricciones. Este juego tiene una estrategia ganadora para el segundo jugador, ¿te ves capaz de encontrarla?

10. De paseo con tu matemático interior

Pasear con tu matemático interior es mejor que pasear sin él. Ésta es una más de las ventajas de poner un matemático en tu vida interior, y es otra forma de decir que «quien más sabe, más disfruta». En serio, hay gente que dice que cuando miras «científicamente» las cosas de la naturaleza, o el arte, o los edificios interesantes de las ciudades, las catedrales, o el paisaje, les quitas su encanto, «matas la poesía» que hay en ellos. Yo creo que es exactamente al revés. Poder observar lo que de bello o de interesante tiene todo lo que nos rodea desde distintas perspectivas es una riqueza que no disfruta quien no tiene esa capacidad, ese entrenamiento o ese hábito. Estoy convencido de que para poder encontrar esas fuentes de disfrute hace falta un cierto esfuerzo, pero también de que la recompensa merece la pena. A veces es una cuestión de formación, de conocimiento, o de entrenamiento y costumbre. Y esto pasa también en todos los ámbitos de la vida y de la cultura, no sólo con las matemáticas,

por supuesto. Las artes plásticas son una fuente de disfrute al alcance de todo el mundo, pero de manera diferente, según sean nuestros intereses y nuestra formación. Disfrutar de Velázquez, aunque sea de una manera superficial, es asequible, porque sus cuadros tienen una maestría técnica y en ocasiones una belleza que inmediatamente cautivan nuestra atención. Pasa lo mismo con Vermeer o con Caravaggio. Sin embargo, el disfrute de la pintura de Miró, o más aún de la de Malévich no es algo tan inmediato. Mucha gente ve esos cuadros y dice: «¡Pero si eso lo pinta un niño de 4 años!», «¿Un cuadrado negro?, ¿y eso es arte? ¡Anda ya! ¡Eso es un engañabobos! ¿Y hay gente que paga millones por eso?, no me fastidies, hay que ser tonto». Poner el valor de una obra de arte sólo en la belleza o en la técnica de la ejecución es ser un poco reduccionista (ponerlo en el precio es una estupidez). Pero es verdad que hace falta un cierto esfuerzo, conocer las ideas de Miró o de Malévich, el contexto en la historia del arte, y entonces se disfruta de esas obras de una manera distinta. Por cierto, que el mismo ejercicio sirve para admirar de una forma más profunda y con más conocimiento de causa a Velázquez, Vermeer o Caravaggio. No te digo nada de la música o de la literatura. Muchas veces además ocurre que los gustos y las modas se ven impuestos, o al menos orientados, por la industria del entretenimiento y acabamos escuchando, leyendo o admirando las mismas obras de arte, del arte que sea, sin llegar a formarnos un criterio propio. No te preocupes que no te voy a soltar un sermón sobre arte. El punto sobre el que quiero llamar la atención

es que hay ciertas cosas que uno las disfruta más cuando más preparado está.

De otra forma, pasa lo mismo con el deporte, a mucha gente le gusta el deporte, y cada cual lo practica a su nivel y con sus propias motivaciones: ganarle al encargado de la fábrica con la bici, bajar peso, ponerse cachas para ligar... Hay mil motivaciones, todas ellas legítimas, por supuesto. Pero no todas iguales, sobre todo cuando se trata de disfrutar del deporte, o del ejercicio físico. Tener una buena relación con nuestro cuerpo, estar contentos con él en la medida de nuestras posibilidades, es una motivación inmejorable. Y si has practicado un poco, entrenado un poco, y te encuentras «en forma» disfrutas más que si no lo estás. No hace falta que seamos deportistas de élite, pero es otra forma de decir que también en lo del deporte, aunque cueste esfuerzo, quien más «sabe», más disfruta.

¿Y esto qué tiene que ver con las mates? Bueno, a estas alturas te das perfecta cuenta, seguro. Hasta ahora hemos visto cómo funciona tu matemático interior, hemos conocido su personalidad, cuáles son las formas de alimentarlo, de fortalecerlo a base de problemas interesantes, de juegos o de aprender cómo se hacen las cosas en el mundo de las matemáticas. Ya estamos llegando al final, y es cuando tu matemático interior te va a devolver el favor de haberte preocupado por cuidarlo y conocerlo. Hay montones de situaciones en las que saber algo de matemáticas, ya sea tener cultura matemática o saber hacer matemáticas, en fin, pensar como un matemático, te puede descubrir nuevas formas

de disfrutar de lo que te rodea. Podrás ver formas de belleza que no sospecharías si tu matemático interior no te las propusiera. O podrás encontrar cosas interesantes a cada paso que des. Uno de mis mejores amigos matemáticos, Henry Wynn, siempre me dice: «Un matemático nunca se aburre». Lleva razón, absolutamente.

Vamos a empezar el paseo que vamos a dar en este capítulo por un concepto de esos que todo el mundo sabe lo que son, pero que cuesta explicarlo: simetría. Es verdad, todos tenemos una idea de simetría, pero cuesta explicarla; imagínate que te viene un niño y tienes que explicarle qué es simetría. No es tan fácil. A veces uno acude al diccionario en busca de inspiración, a ver si la definición le aclara algo, pero no siempre es así. Mira lo que dice el diccionario de la RAE sobre simetría: «Correspondencia exacta en forma, tamaño y posición de las partes de un todo». No aclara mucho para darle la explicación al niño, y es que no es fácil. Vamos a acercarnos un poco a la simetría con ojo matemático.

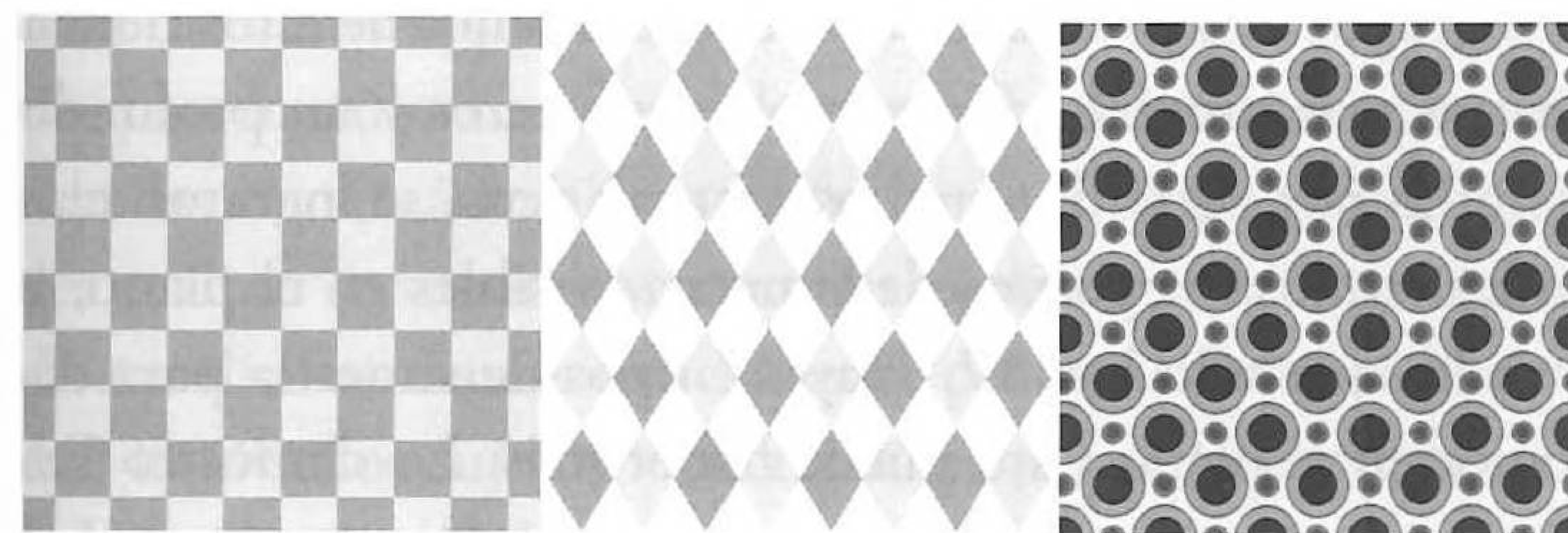
Mucha gente piensa que nuestros cuerpos son simétricos, ¿no? Bueno, la cara más o menos. Y con eso quieren decir que si pusiéramos una línea vertical en medio de nuestra cara, lo que hay a un lado y otro se corresponden como reflejados en un espejo. No es exactamente así (haz la prueba con una foto tuya y verás que queda rarísimo), pero más o menos sí, tenemos una simetría bastante ajustada con respecto a esa línea a la que llamaremos «eje vertical». Hay cosas que tienen simetría con respecto a un eje horizontal, como un

árbol que se refleja en el río, y hay cosas que tienen simetría con respecto al eje que te dé la gana, como un círculo con respecto a cualquier eje que pase por su centro. Y luego hay cosas que juegan con la simetría. Estrictamente no son simétricas pero tienen un aspecto «medio simétrico» que nos llama la atención, como el símbolo del yin y el yang.

El estudio de la simetría es fundamental en la ciencia, y en particular en la física y en las matemáticas, pero también en biología, cristalografía y otras muchas disciplinas. Por supuesto, también en el arte. Vamos a echarle un vistazo a lo que se llama la simetría del plano, para que puedas hacerte un poco idea de qué estudiamos cuando hablamos de simetría. Al hablar de simetría, es bastante útil expresar que algo tiene simetría cuando puedo moverlo de alguna forma y que se quede igual. No vale romperlo, estirarlo, pegarlo ni nada de eso, pero sí vale moverlo, girarlo y reflejarlo. De hecho, esas son las tres operaciones básicas que voy a permitir: desplazarlo (lo llamaré «traslación»), girarlo en torno a un centro dando media vuelta, o un cuarto, o cualquier parte de vuelta (lo llamaré «giro») y reflejarlo con respecto a una recta cualquiera (a esto lo llamaré «reflexión»). Bien, pues cualquier figura a la que yo pueda someter a alguna de estas tres operaciones o a combinaciones de ellas, diré que tiene simetría de traslación, de giro, de reflexión o varias combinadas. Se impone algún ejemplo. Vamos a ver:

Mira los tres dibujos de la figura 1 e imagínate que tenemos todo un plano, infinito, pintado así, uno con cuadros, otro con rombos y otro con círculos. Imagínate que muevo

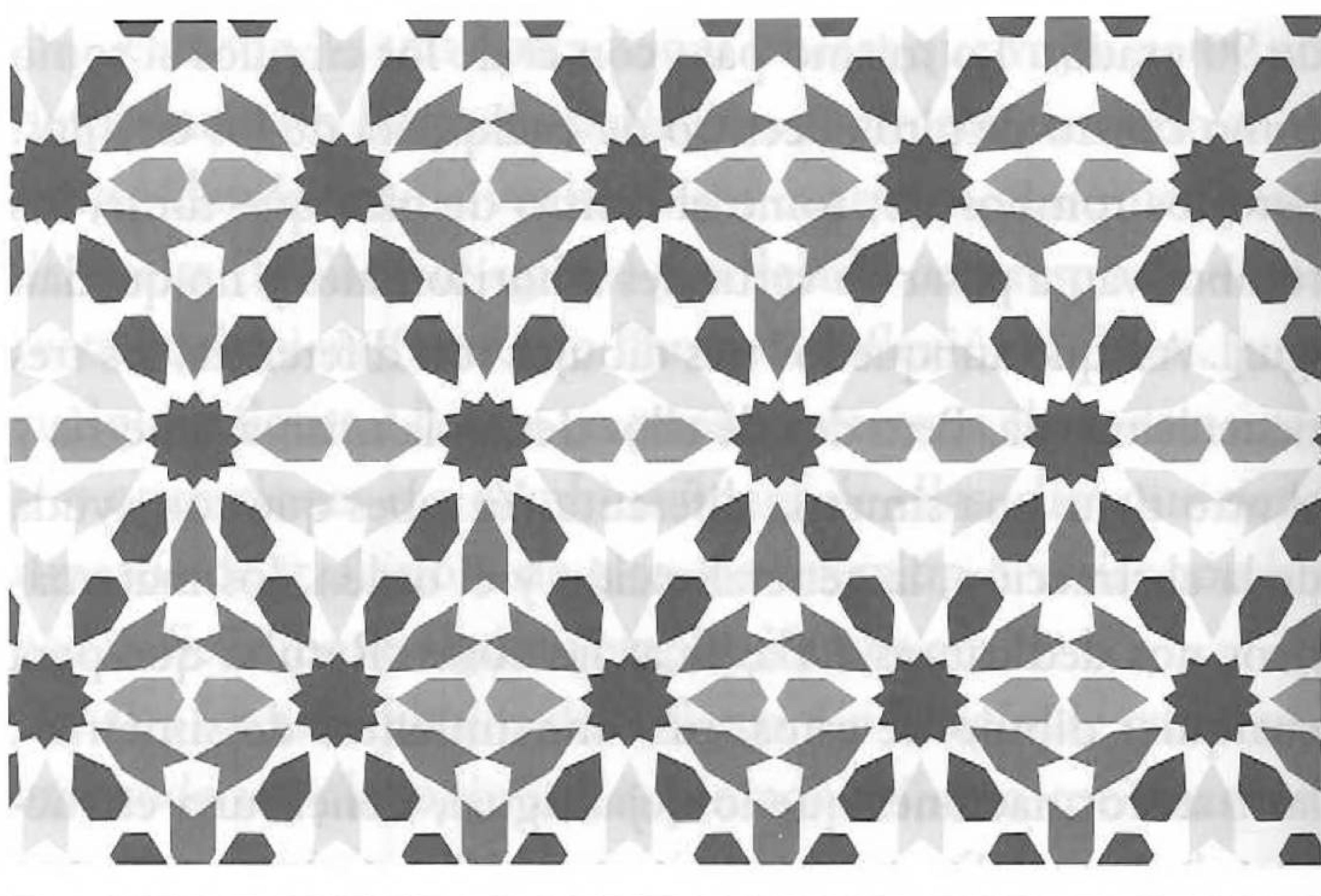
Figura 1: Tres patrones simétricos.



cualquiera de los tres papeles una distancia adecuada con el ángulo adecuado. Sólo desplazar, sin girarlo nada. Si te das la vuelta y te digo que mires de nuevo, parecería que no los he movido. Los tres tienen simetría de traslación. Observa ahora que si fijo como centro de giro en el centro de uno cualquiera de los cuadrados puedo girar el dibujo 90 grados y se queda igual. Tiene simetría de giro con respecto a un giro de 90 grados. Lo mismo pasa con el de los círculos si tomo como centro de giro el centro de cualquiera de los círculos. Pero los rombos no, tome el centro de giro que tome, los rombos van a pasar de verticales a horizontales y no quedan igual. Así que aunque los tres dibujos son diferentes, los tres tienen simetría. Pero dos de ellos tienen la misma simetría y el otro tiene una simetría diferente. Ya sabes que con ayuda de la abstracción, la generalización y el orden, los matemáticos nos dedicamos a clasificar las cosas. Resulta que para cualquier dibujo de estos, sus «movimientos de simetría», las transformaciones que lo dejan igual, tienen una estructura de grupo (la operación que consideramos es la compo-

sición de movimientos). Y podemos distinguir dibujos por sus grupos de simetría, o saber si dos dibujos de éstos tienen las mismas simetrías. Tras grandes esfuerzos y un profundo estudio por parte de muchos matemáticos, se lograron clasificar todos los grupos de simetría posibles en el plano, y resulta que sólo hay 17. Hay 17 tipos de simetría para dibujos en el plano y no puede haber más. Lo demostró Fedorov en el siglo XIX. Ahora, lo que es alucinante de verdad es que los artistas que decoraron la Alhambra de Granada, muchos siglos antes de Fedorov, fueron capaces de poner en sus paredes ejemplos de los 17 tipos. Fueron capaces de plasmar, de forma artesanal «toda la diferente simetría que es posible». A mí eso me impresiona, te lo digo de verdad.

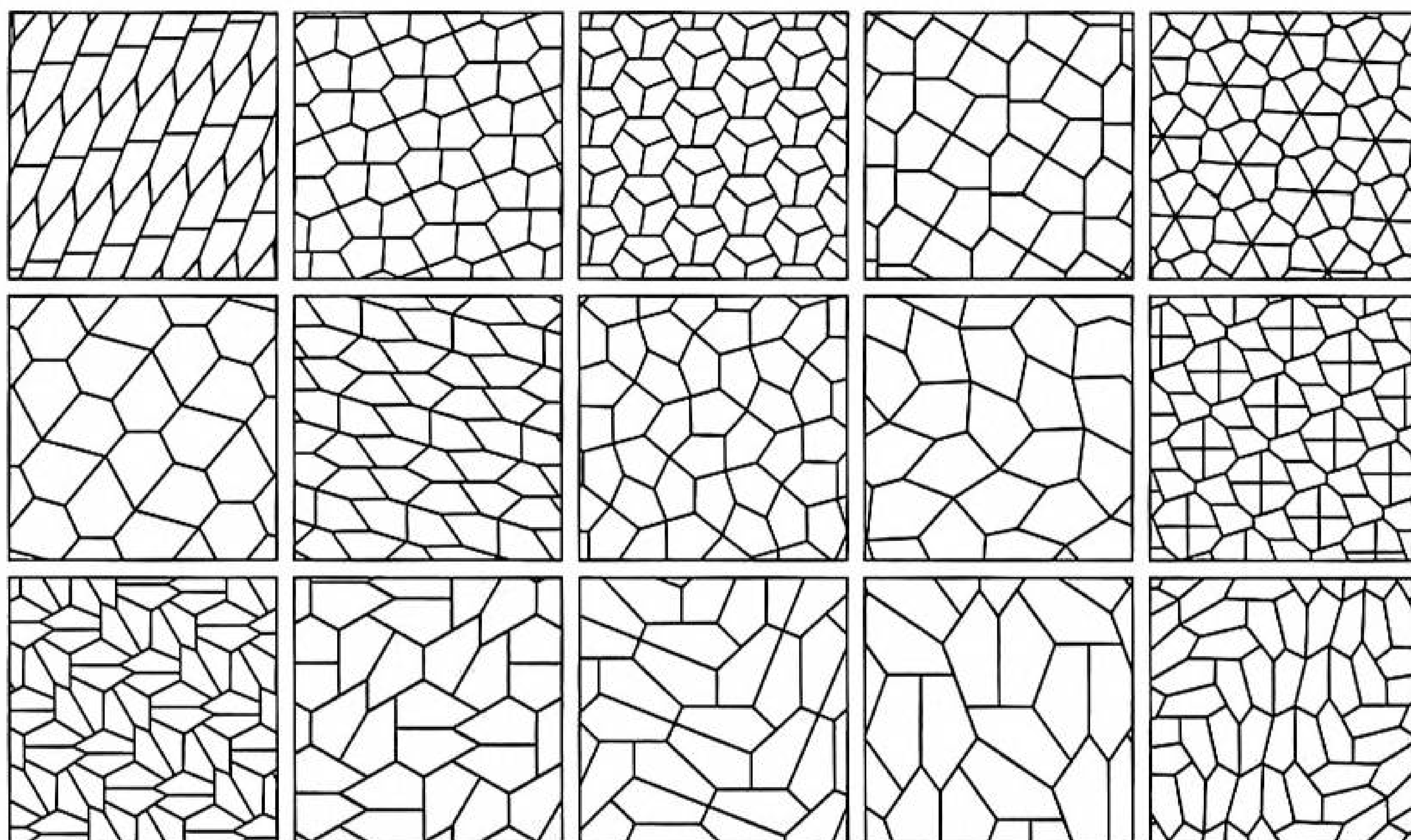
Figura 2: Una de las decoraciones simétricas en la Alhambra.



Si algún día visitas la Alhambra, o el Alcázar de Sevilla, o las torres del mudéjar aragonés, o las mezquitas, tumbas y templos musulmanes de cualquier parte del mundo, puedes usar las matemáticas para disfrutar más de tu visita. Puedes analizar su simetría y maravillarte de cómo la creatividad de aquellos artesanos fue capaz de producir toda esa variedad de diseños sujetos a las rígidas leyes de la simetría. Tu matemático interior te hará ver con más atención y con más interés esas preciosas decoraciones. Y no le quitará nada al disfrute estético de su belleza. Más bien le añadirá una nueva dimensión. Hay diseños simétricos que sugieren estabilidad, inmovilismo, permanencia. Y otros parecen querer moverse, evolucionar por la pared, bailar. Esas sensaciones se deben a la simetría que los gobierna y tu matemático interior sabe que eso se puede describir mediante unas secretas estructuras algebraicas llamadas grupos de simetría. Maravilloso.

Vamos a dar otro paseo, esta vez hasta China. ¿Recuerdas el problema de cubrir un recinto con baldosas rectangulares que hemos visto en el capítulo «Somos matemáticos»? Si en lugar de pensar en cubrir un recinto dado, pensamos en un plano infinito, hablamos de cubrimientos del plano, y ése es un problema precioso. Hay montones de formas distintas de cubrir el plano, por supuesto, y son muy interesantes las que lo hacen con formas iguales. Cuando podemos cubrir el plano con copias iguales de una misma pieza decimos que esa pieza «cubre el plano». Por ejemplo, cualquier rectángulo sirve para cubrir el plano, pero un círculo no (siempre dejará huequitos). Hay montones de piezas

Figura 3: Las quince formas de cubrir el plano con pentágonos que se conocen de momento.



capaces de cubrir el plano, infinitas en realidad, de todo tipo, con pocos o muchos lados, lados rectos o curvos, cóncavas, convexas, regulares o irregulares... toda la variedad que puedas imaginar. Mira, por ejemplo, en la figura 3 aparecen las formas que se conocen de cubrir el plano con pentágonos iguales. Se conocen de momento 15 de estos cubrimientos pentagonales, pero no se sabe si hay más o no, si la lista está completa o hay miles de otras formas que todavía nadie ha descubierto.

Si te fijas, ninguno de los pentágonos de estos 15 cubrimientos es un pentágono regular, con sus cinco lados y sus cinco ángulos iguales. El pentágono regular no cubre el plano, deja huecos lo pongas como lo pongas. Pero hay otros

polígonos regulares que sí que lo cubren, por ejemplo, está claro que el cuadrado es uno de ellos. Voy a dejarte como reto en el ejercicio 1 de este capítulo que encuentres la lista de todos los posibles polígonos regulares que cubren el plano (y des una demostración de que tu lista es completa, claro).

Como sabes, a los matemáticos nos gusta sacarle el jugo a los problemas, dar cada vez respuestas más completas y plantear nuevos problemas a partir de otros. Así que muchas veces la cadena de preguntas es: ¿se puede hacer tal cosa? Y si se puede, ¿de cuántas formas se puede?, ¿se pueden enumerar todas? Y si se puede hacer de más de una forma, ¿cuál es la mejor? Esto es lo que pasa con el problema de los cubrimientos. Está claro que se puede cubrir el plano con piezas iguales. Hay infinitas formas (y se puede demostrar), así que nos gustaría saber cuál es la mejor. Pero, claro, para saber cuál es la mejor (si es que la hay) hace falta establecer un criterio: la mejor ¿respecto a qué? A lo largo de la historia, el criterio que más sentido ha tenido es éste: que tenga la menor relación entre el perímetro de la pieza y el área que cubre. O sea, que si hay dos piezas que cubren el mismo área, es mejor la que tiene un perímetro más pequeño. Te pongo un ejemplo: imagínate que tengo un cuadrado de 2 metros de lado. Puedo cubrir el plano con cuadrados como éste. El área que cubre cada uno de esos cuadrados es de 4 metros cuadrados, y su perímetro es de 8 metros. Tomemos ahora un rectángulo de 1 metro por 4 metros. También cubre el plano y el área que cubre cada uno de estos rectángulos es

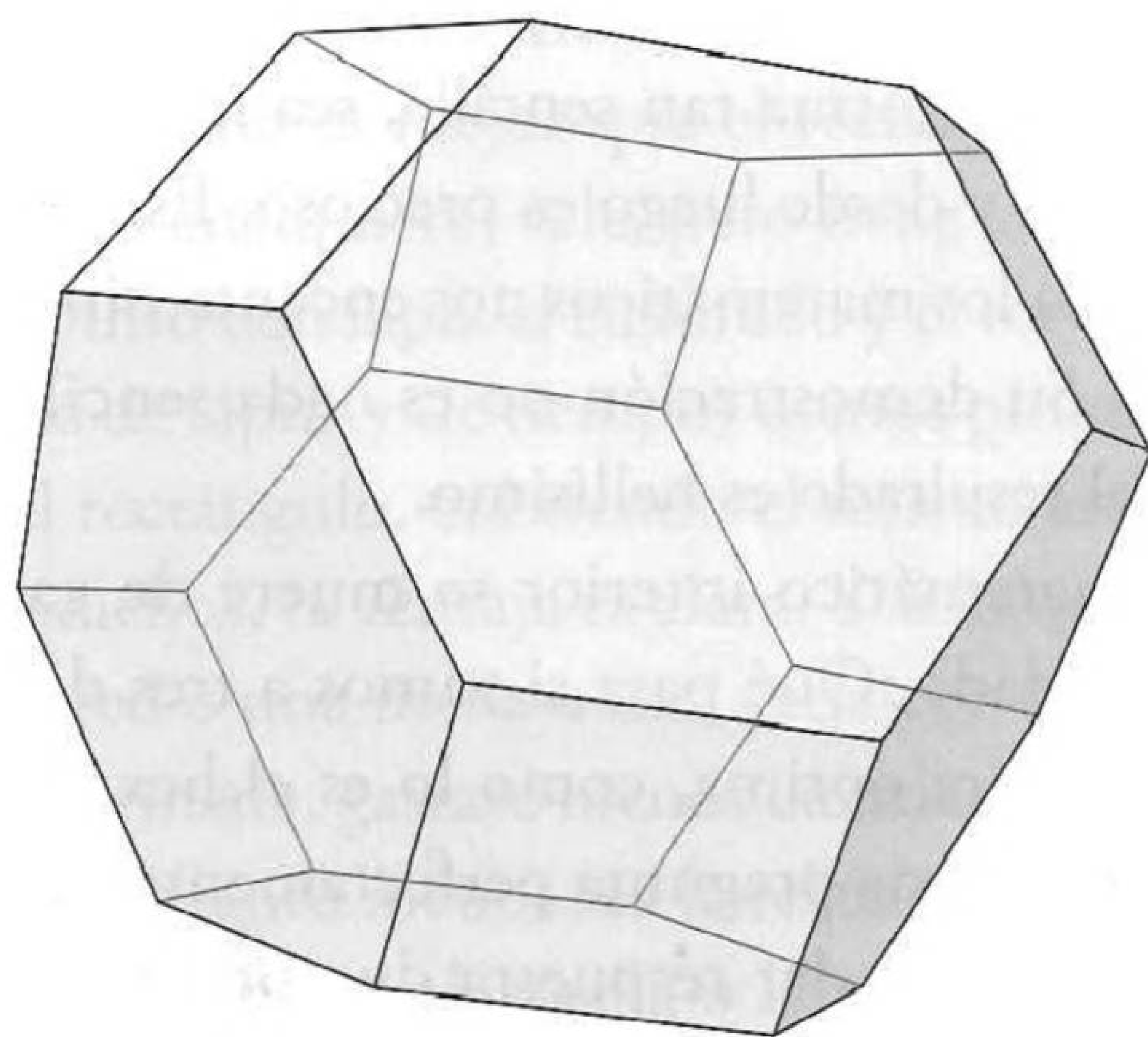
también de 4 metros cuadrados. Pero su perímetro es mayor, su perímetro mide 10 metros. Así que respecto a este criterio, el cuadrado es mejor que el rectángulo. Es un criterio como otro cualquiera, vale, pero tiene sus aplicaciones prácticas: si pinto con lápiz el cuadrado y el rectángulo, gasto dos metros de lápiz (y de tiempo) menos pintando el cuadrado que el rectángulo, cubriendo el mismo área. Si tengo que pintar muchos, la ventaja es clara. Y si lo que tengo que hacer es una red o una malla o una verja con huecos de una medida determinada, gastaré menos cuerda, menos alambre o menos metal cuanto menor sea la relación entre área y perímetro de los huecos de la malla o la verja. Será mejor hacerla con cuadrados que con rectángulos. Establecido el criterio, ¿hay alguna forma óptima, mejor que todas las demás?

Hacia el año 300 de nuestra era, Pappus de Alejandría conjeturó que, siguiendo ese criterio, la mejor de todas las formas que cubren el plano era el hexágono. Él no lo demostró, pero tampoco nadie le pudo refutar durante muchísimos años. Se conocía esta conjetura de Pappus como «conjetura del panal». Te puedes imaginar por qué, ¿no? Efectivamente, las abejas usan hexágonos para construir sus panales, y no parece que sea casualidad, porque realmente es la forma con la que menos cera gastarían para mantener el área de los huecos, así que necesitan gastar menos recursos y es más fácil sobrevivir. El caso es que hubo mucha gente tratando de probar la conjetura durante más de 1.700 años, hasta que en 1999 el norteamericano Thomas Hales la logró demostrar. Todo un hito y un resultado de alguna forma sorprendente, porque de todas las posibles formas que cubren el plano, con curvas, sin curvas, cóncavas, convexas..., que el hexágono, una forma tan sencilla, sea la mejor de todas, es una sorpresa y desde luego es precioso. Éste es el tipo de resultado que a los matemáticos nos encanta: simple, preciso y definitivo. Su demostración no es nada sencilla, ésa es la pena, pero el resultado es bellísimo.

Pero tu matemático interior se muere de ganas de generalizar, ¿verdad? ¿Qué pasa si vamos a tres dimensiones? ¿Existe una figura óptima, como lo es el hexágono en dos dimensiones? Es una pregunta perfectamente natural, y a la que se ha intentado dar respuesta durante mucho tiempo. Resulta además que de los poliedros regulares (que se llaman sólidos platónicos) solamente el cubo rellena el espacio; los otros cuatro (tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro) dejan huecos, así que la cosa está más difícil. La primera respuesta chula a esta pregunta la dio lord Kelvin, el famoso físico y matemático británico, que es uno de esos ejemplos de una persona que hizo grandes contribuciones a la física porque tenía sólidos conocimientos matemáticos. Seguro que te suena por lo de la escala Kelvin de temperatura. Bueno, pues el tal lord Kelvin propuso como figura óptima para llenar el plano una cosa que se llama octaedro truncado. Mira el dibujo de la figura 4 para que te hagas idea de cómo es. Un octaedro truncado es un octaedro regular, de ocho caras, al que le hemos recortado las puntas.

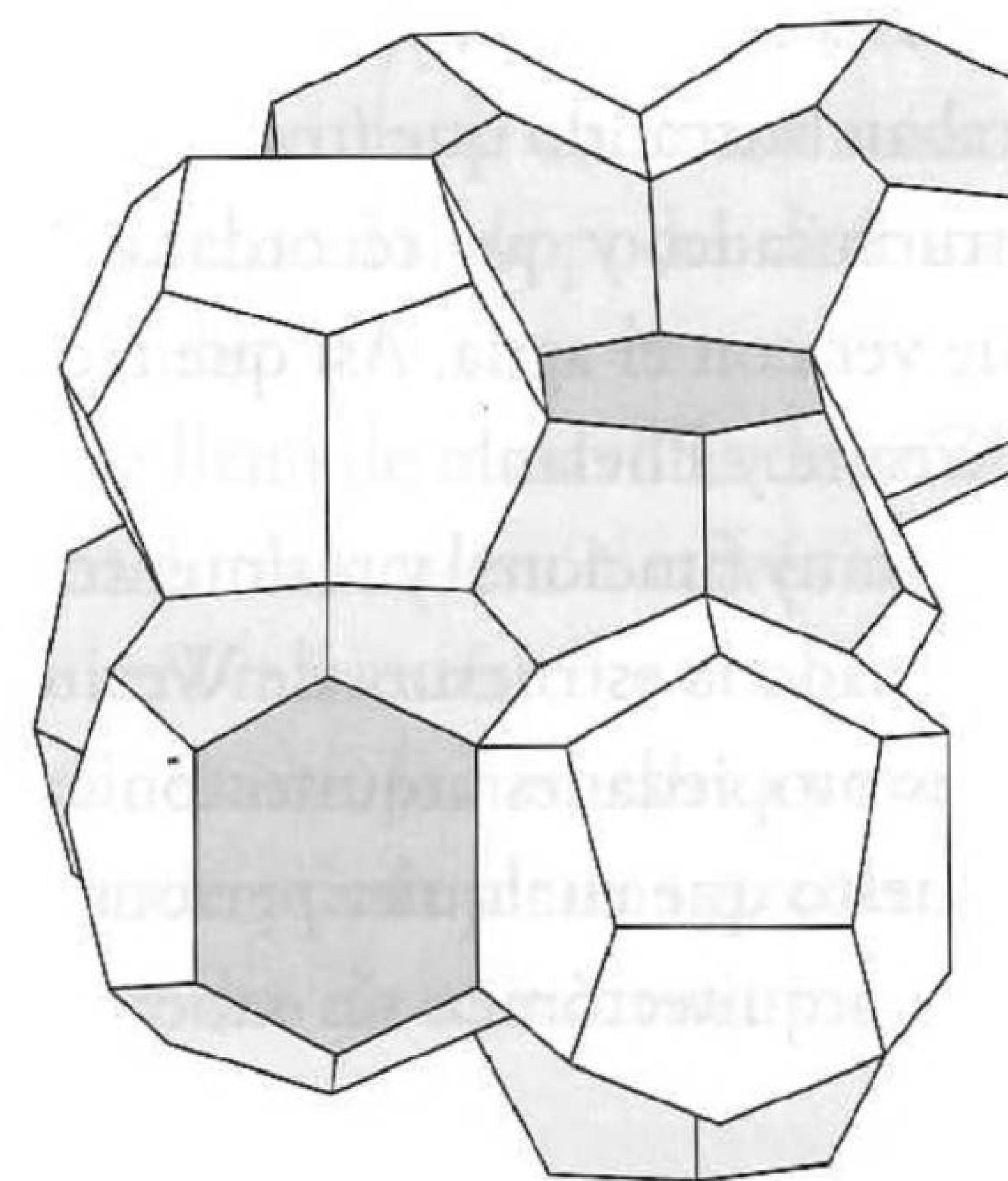
El criterio para decir que una figura es mejor que otra es la traducción a tres dimensiones del criterio que teníamos en

Figura 4: Un octaedro truncado.



dos dimensiones. Ahora sería la figura que, para cubrir un volumen dado, tiene una superficie exterior menor (gastamos menos material para construirla hueca). Para eso, se calcula la superficie de la figura y su volumen, y se divide uno entre otro. Bien, pues pasaron los años y nadie encontraba una figura mejor que la de Kelvin. Este problema empezó a llamarse la «conjetura de Kelvin». Nadie lograba demostrarla ni hallar un contraejemplo. Pasaron más de 100 años y en 1993 un físico llamado Denis Weaire y su estudiante de doctorado Robert Phelan sorprendieron al mundo con una figura mejor que la de Kelvin. Resulta que ellos estaban estudiando la estructura de cierto tipo de espumas. La estructura es complicadita, está formada por varias piezas de dos tipos: dodecaedros irregulares y tetracaidecaedros (me encanta esa

Figura 5: La estructura de Weaire y Phelan.



palabra) irregulares también. Los dodecaedros tienen doce caras y los tetracaidecaedros catorce.

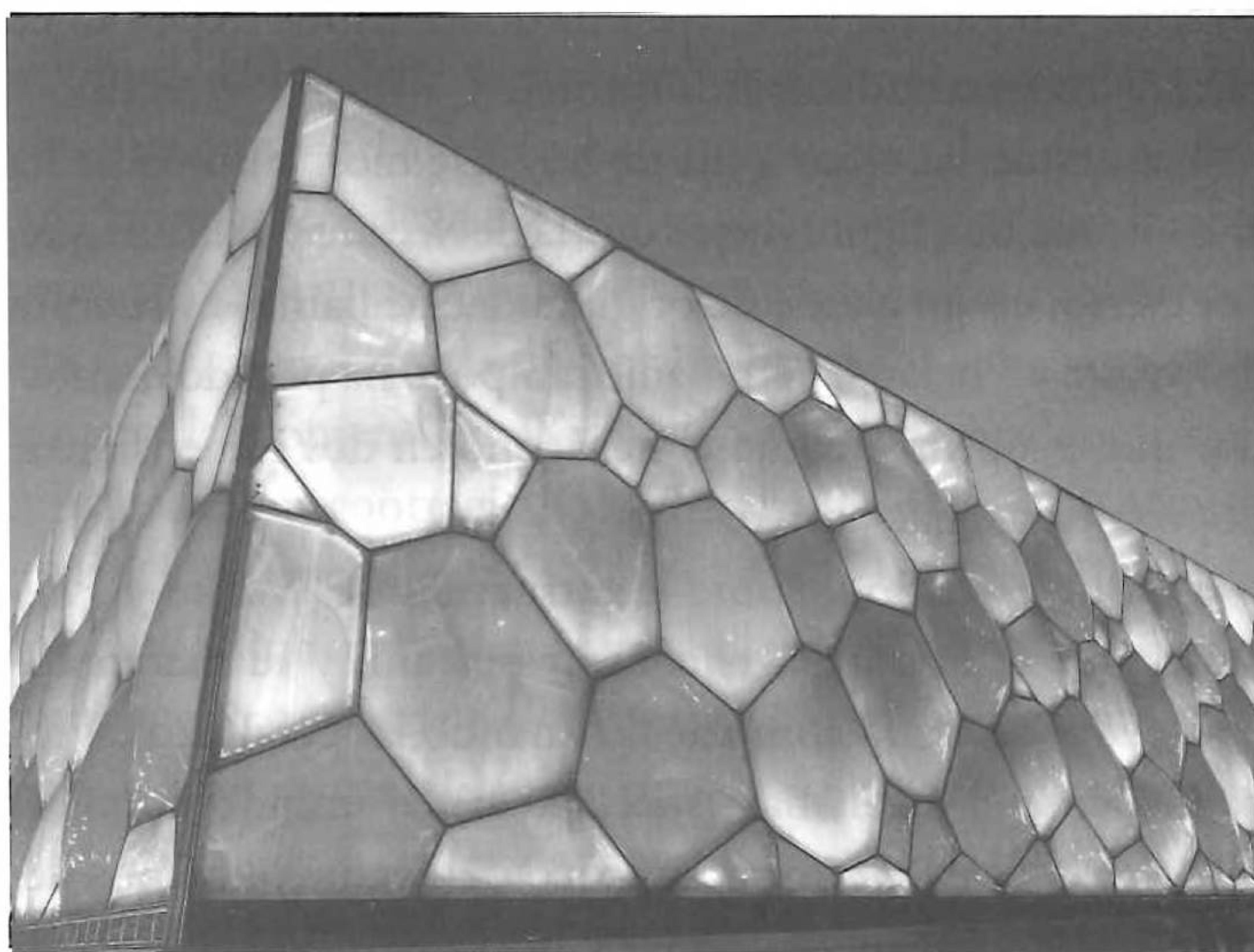
Y así están las cosas a día de hoy. De momento nadie ha encontrado una figura mejor que la de Weaire y Phelan, que, por cierto, en un alarde de originalidad se llama «estructura de Weaire y Phelan»; pero nadie tampoco ha podido demostrar que es óptima, como el hexágono en dos dimensiones. El problema sigue abierto.

Lo que es curioso sobre la estructura de Weaire y Phelan es que te la puedes encontrar por ahí, y tu matemático interior sonreirá complacido cuando la reconozcas. Probablemente el lugar más espectacular del mundo donde la puedes ver es en el centro acuático de Pekín (ya hemos llegado a China), llamado Water Cube, que sirvió como sede

de las competiciones de natación en los Juegos Olímpicos de 2008. El edificio es magnífico, y cuando los arquitectos lo planeaban, estaban buscando que tuviera un aspecto a la vez orgánico y estructurado, y que recordara al agua, o a algo que tuviera que ver con el agua. Así que recurrieron a... ¡la estructura de Weaire y Phelan!

Es un edificio muy funcional y realmente espectacular. El hecho de haber usado la estructura de Weaire y Phelan contribuye a que sus propiedades arquitectónicas sean sobresalientes. Por supuesto que cualquier persona puede disfrutar de esta maravilla arquitectónica sin saber nada sobre la es-

Figura 6: El Water Cube de Pekín, con la estructura de Weaire y Phelan.



Fuente: Zhao Jian Kang / Shutterstock.com

tructura de Weaire y Phelan, ni sobre la conjetura de Kelvin ni los cubrimientos del plano y del espacio, pero quien ha dejado hablar y desarrollarse a su matemático interior tiene más perspectivas desde donde poder disfrutar de estructuras como el Water Cube.

El mundo está lleno de maravillas de este tipo que puedes disfrutar de una forma nueva a través de las matemáticas. A veces el goce será más estético y otras más intelectual. Conocer la historia, el arte, la naturaleza y cómo las matemáticas lo permean todo puede ser una gozada. Anímate a pasear a menudo de la mano de tu matemático interior.

Ejercicio 1: ¿Cuáles son los únicos polígonos regulares que cubren el plano? ¿Por qué no hay otros?

Ejercicio 2: ¿Puedes demostrar que de todos los polígonos regulares que cubren el plano el hexágono es el que tiene menor relación entre su perímetro y el área que cubre?

11.
¿Cuál es el siguiente número?

Llegamos al final. O al principio, según se mire. Llegamos al final del libro. A partir de ahora seguirás por tu cuenta. Este momento del final, en el que puedes plantearte cómo seguir ahora, me recuerda a esos test de inteligencia que todavía hoy en día se hacen (de los que te hablaba al principio del todo) para medir el coeficiente intelectual, que parecen hechos para medir la inteligencia, y que miden más que nada la inteligencia lógico-matemática, aunque no sé si siempre lo logran, la verdad. En esos test había (o hay) una pregunta típica en la que se ponían unos cuantos números y había que seguir la serie.

Vamos a jugar un poco a eso, y así entenderás mejor lo que quiero decirte al final del libro, antes de despedirme.

Mira estos números: 2, 4, 6, 8, 10, 12... ¿Cuál es el siguiente? Es fácil, ¿no? Estoy poniendo los números pares, y el siguiente es el 14. Siguiendo así puedes continuar la serie de forma coherente. Pero ¿qué pasa si te pido el siguiente de esta serie de números: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...? Vale, tampoco

me he matado la cabeza, son los primeros números primos, así que puedes seguir tranquilamente con el 19 y el 23.

Hay una de estas sucesiones que es muy famosa. Mira, sus primeros números son éstos: 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211... ¿Sabrías seguir? ¿Sabrías cómo construir el siguiente número? Si nunca la has visto, te dejo que la pienses un poco. Es más un puzle, un rompecabezas, que una cuestión matemática, pero es gracioso cuando lo descubres. Si ya lo has intentado, con o sin éxito, puedes seguir leyendo.

Cada número de esta sucesión describe al anterior, así que empezamos con el 1. El segundo describe eso, que es «un uno», o sea, 11. El siguiente describe a éste, es decir, «dos unos»: 21. El siguiente dice que este número tiene un dos y un uno: 1211..., y así sucesivamente.

No tiene mucho de matemático, la verdad. Pero lo que sí es bastante matemático es generar una sucesión de números en la que cada número nuevo se construye a partir del anterior o los anteriores. Es lo que se llama una sucesión recursiva. El ejemplo más famoso, y probablemente la sucesión más conocida de las matemáticas, recursiva o no, es la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... ¿Te das cuenta de cómo se forma? Si nunca antes has tenido contacto con ella, puede parecerte un poco sosa; si ya la conoces, es difícil que yo pueda decirte nada nuevo. De todas formas, y por si acaso, te cuento que la sucesión de Fibonacci se construye del siguiente modo: los dos primeros números son dos unos, y a partir del tercero, cada nuevo número es la suma de los dos anteriores. Compruébalo

con los que he escrito y verás que es así, y que puedes predecir que el siguiente es el 55. La sucesión de Fibonacci es una de esas cosas que maravillan al matemático interior de mucha gente, se dediquen a las matemáticas o no. Y es que pese a lo sosa que parece (sumar dos números para obtener el siguiente no es el colmo de la diversión) resulta que la sucesión de Fibonacci está sorprendentemente presente en muchísimos fenómenos de la naturaleza. La verdad es que es una sorpresa y todo un enigma que algo tan artificial, una sucesión en principio tan arbitraria y poco natural, aparezca por doquier en muchísimos lugares. Seguramente tiene mucho que ver su estrecha relación con un famoso número llamado «la razón áurea» o «el número de oro», sobre el que se han escrito ríos de tinta, y que también se encuentra presente en muchísimos lugares de la naturaleza y el arte, entre otros muchos sitios. La sucesión de Fibonacci puede escribirse en términos del número de oro, y viceversa, realmente están muy estrechamente ligados. No me voy a extender en esto, si cuando cierres este libro te entran ganas de abrir otro sobre matemáticas o sobre divulgación de las matemáticas que siga alimentando a tu matemático interior, es muy probable que pronto vayas a encontrarte con la razón áurea o con la sucesión de Fibonacci.

Prefiero quedarme con lo de las sucesiones en general. Vamos a hacer una prueba: si yo te pregunto: ¿cuál es la fórmula que describe la sucesión que empieza así: 1, 1...? ¿Qué me dirías? ¿Es el 2 el siguiente número? ¿Es el comienzo de la sucesión de Fibonacci? ¿Es una sucesión que contiene

sólo unos? Mira la siguiente fórmula: $(x\text{-}1)\cdot(x\text{-}2)+1$. Si sustituimos x por 1 obtenemos un número, si sustituimos x por 2 obtenemos un segundo número, si sustituimos x por 3 obtendremos un tercer número..., así que con esa fórmula construimos una sucesión. Mira cómo es: si x=1 entonces (1-1)·(1-2)+1 da como resultado 1. Si x=2 entonces (2-1)·(2-2)+1 da como resultado también 1. Si x=3 entonces (3-1)·(3-2)+1 da como resultado 3. O sea, que con esta fórmula produzco la sucesión cuyos primeros términos son 1, 1, 3... Vamos, que empezando con 1, 1... el siguiente número ¿puede ser cualquiera?

Pues sí, efectivamente, puede ser cualquiera. Y se puede demostrar matemáticamente. En realidad no es muy complicado, aunque si tu matemático interior anda vago hoy, te puedes saltar la demostración y no pasa nada. Vuelve cualquier día por aquí y la lees si hoy no te apetece. Vamos con ello de todas formas.

Hay muchísimas formas diferentes de producir sucesiones de números con las condiciones que queramos. Lo que quiero enseñarte ahora es sólo un ejemplo. Voy a contarte una forma de construir una fórmula (un polinomio realmente) que dado el comienzo de una sucesión, es decir, unos cuantos números, produzca una sucesión que empieza exactamente por esos números y en la que el siguiente sea un número cualquiera de tu elección.

Supongamos que tienes una sucesión que empieza por dos números cualesquiera, llamémosles a_1 y a_2. En nuestro caso, eran a_1=1 y a_2=1. Podemos construirnos una fórmula

muy sencilla que valga a_1 cuando x es 1 y que valga a_2 cuando x es 2.

La fórmula tiene esta pinta: $(x\text{-}1)\cdot(a_2\text{-}a_1)+a_1$.

Comprobemos: si x es 1 entonces la fórmula queda $(1\text{-}1)\cdot(a_2\text{-}a_1)+a_1$, pero como 1-1 es cero, esto da exactamente a_1. Perfecto.

Cuando x es 2, entonces la fórmula da $(2\text{-}1)\cdot(a_2\text{-}a_1)+a_1$, o sea $1\cdot(a_2\text{-}a_1)+a_1$, lo cual es $a_2\text{-}a_1+a_1$, que es exactamente a_2. Como queríamos.

Si sabes mates, te habrás dado cuenta de que esto es la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(1,a_1)$ y $(2,a_2)$. Y si no, da igual, no es importante para nosotros ahora, sólo quería que supieras que esto no viene por arte de magia, que hay unas matemáticas detrás. Bueno, pues ya tenemos nuestra fórmula, a la que llamaremos f_2. La f es de fórmula, y el 2 porque nos da los dos primeros números de la sucesión.

Si te acuerdas de nuestro ejemplo, como a_1 valía 1 y a_2 valía 1, la fórmula queda $(x\text{-}1)\cdot(1\text{-}1)+1$. Y como 1-1 es 0, esta fórmula da siempre 1, valga lo que valga x. Una sosada.

Ok, vamos a tratar de construir f_3 de modo que nos dé los primeros tres números de la sucesión. Para empezar queremos que f_3 valga a_1 si x vale 1 y que valga a_2 si x vale 2. Ahora piensa un número, el que quieras, el que te dé la gana, 3, 17, π, -51, da igual. Lo llamaremos a_3. Nuestra fórmula tiene que valer a_3 cuando x vale 3.

La fórmula es sencilla y en ella vamos a usar un número auxiliar que lo vamos a llamar b_3, ahora verás por qué.

La fórmula es: $b_3\cdot(x\text{-}1)\cdot(x\text{-}2)+f_2$.

Fíjate bien, cuando x vale 1 o x vale 2, la fórmula f_3 vale lo mismo que f_2, ¿te das cuenta de por qué? Es porque si x es 1, $(x\text{-}1)$ vale 0, y si x es 2, $(x\text{-}2)$ es 0, así que en cualquier caso $(x\text{-}1)\cdot(x\text{-}2)$ vale 0 y sigue siendo 0 si lo multiplicamos por b_3. De forma que nos queda solamente el valor de f_2. ¡Como queríamos! Es lo que queríamos porque cuando x vale 1, f_2 vale a_1 y cuando x vale 2, f_2 vale a_2.

¿Y cuando x vale 3? La fórmula vale $b_3\cdot2+f_2$. Tenemos que calcular cuánto vale f_2 cuando x vale 3. Bueno, pues lo calculamos y ya está: es $2\cdot a_2\text{-}a_1$. Si no te lo crees, ve a la fórmula y sustituye x por 3. Si quieres, por abreviar le llamo a este valor $f_2(3)$, que indica «lo que valga f_2 cuando x es 3».

Bien, no nos perdamos, tenemos hasta ahora que el valor de f_3 cuando x vale 3 es: $b_3\cdot2+f_2(3)$, y eso quiero que valga a_3, así que me queda esta ecuación: $a_3=b_3\cdot2+f_2(3)$.

Genial, pues como a_3 ya sé lo que vale (porque lo he elegido yo antes de empezar) y como $f_2(3)$ también sé lo que vale, obtengo el valor de b_3, el número ese auxiliar, y ya está. Y sale que b_3 es $(a_3\text{-}f_2(3))/2$. O sea, que la fórmula que vale a_1 cuando x vale 1, que vale a_2 cuando x vale 2 y que vale a_3 cuando x vale 3 es:

$$\frac{a_3 - f_2\,(3)}{2}\,(x-1)\,(x-2) + f_2$$

Tiene una pinta un poco fea, pero, en serio, ponte algún ejemplo y verás que no es tan difícil. Dirás: «Vale, una sucesión de la que sólo sé dos números puede seguir por cualquier cosa, pero ¿y si tengo más números?». Pues lo bueno de

este procedimiento de las fórmulas es que lo puedo repetir las veces que quiera. Si empiezo con unos números que me vienen dados, los que sean, a_1, a_2, a_3..., tantos como me digan, me hago la fórmula f_2 como antes, con a_1 y a_2. Con el a_3 me hago la fórmula f_3, y puedo seguir construyéndome la fórmula siempre, la f_4 con a_4 si me lo dan, la f_5..., y siempre puedo construirme una fórmula que en el siguiente número valga lo que a mí me dé la gana.

Si no te da miedo verlo escrito en general, supongamos que te han dado n-1 números y quieres que el a_n sea cualquiera, el que tú te inventes. Vas poco a poco construyendo todas las fórmulas como antes, de modo que la «enésima», f_n es:

$$b_n\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot\ldots\cdot(x-(n-1))+f_{n-1}$$

Y ya está. Puedes hacerlo siempre. Esto demuestra que dados unos cuantos números en sucesión el siguiente puede ser cualquiera.

Es una demostración que cuesta un poco seguir si no estás acostumbrado a las matemáticas, pero estoy seguro de que con paciencia, un poco de cuidado y quizá poniéndote algunos ejemplos, la puedes entender completamente.

No te lo van a admitir en un test de inteligencia, pero el siguiente número de la sucesión que quieran plantearte es el que tú decidas. Y es absolutamente correcto.

¿Y ahora qué? Hemos llegado al final. Ha sido bonito escribir este libro para ti y espero que te haya sido útil. Supongo que habrá habido partes que se te han hecho más complicadas, y habrá habido otras más sencillas. Espero que hayas

podido disfrutarlas todas, las complicadas y las sencillas. Y espero también que ahora sepas un poco mejor en qué consiste la inteligencia matemática, cómo trabajamos los matemáticos y cómo es tu matemático interior.

No sé cómo vas a seguir a partir de ahora tu relación con las matemáticas. Tampoco sé cuál ha sido hasta ahora. A lo mejor, las matemáticas te llamaban la atención pero no sabías por qué, a lo mejor les tenías un odio irremediable desde la escuela. Quizás las matemáticas son para ti una de esas partes de la vida que sabes que están ahí, en algún rincón del mundo, pero que te resultan indiferentes. O quizá siempre te gustaron, quizá son una de tus aficiones, a la que dedicas poco tiempo. O tal vez sí que les dedicas mucho tiempo. No lo sé, no sé cuáles han sido los términos iniciales de la sucesión que marca tu relación con las matemáticas. Este libro ha sido un número más en esa sucesión, yo espero que positivo, ojalá no haya sido un cero, y mucho menos un número negativo.

De todas formas, y eso es lo importante, ahora puedes seguir por donde tú quieras, puedes construirte a partir de aquí la sucesión que prefieras, llena de números positivos si así lo deseas. Acabamos de demostrar matemáticamente que comience como comience una sucesión, uno la puede continuar como quiera, siempre. Así que aunque suene a autoayuda de esa de «atrévete a soñar» con fondo de cataratas del Niágara, lo cierto es que da igual de dónde vengas en lo que se refiere a tu relación con las matemáticas; a partir de ahora puedes avanzar por donde tú prefieras. Matemáticamente

demostrado. Probablemente esta misma «filosofía» también vale para otras cosas en la vida.

No podría terminar el libro sino con un último ejercicio, esta vez sobre sucesiones.

Hasta pronto y ¡que Pitágoras os acompañe a ti y a tu matemático interior!

Ejercicio 1: Vamos a poner un poco de matemáticas en la sucesión que hemos dicho que no era matemática. Demuestra que en la sucesión que hemos visto: 1, 11, 21, 1211, 111221... nunca va a parecer un 4, nunca nunca nunca. ¿Ves cómo las matemáticas están por todos lados, incluso en esta sucesión?

Pistas y soluciones para los ejercicios

Aquí tienes pistas y soluciones para los ejercicios propuestos. Hay una lista de pistas y otra de soluciones completas.

Si no sabes por dónde empezar, lo cual es muy normal, acude a la lista de pistas para los ejercicios. Es posible que te ayuden a comenzar, a intentar e incluso a resolver algunos ejercicios. Algunas pistas dan indicaciones extensas y otras son meras reformulaciones del enunciado del ejercicio. Sirven casi siempre para ayudarte a empezar, que es lo más complicado.

Y si con las pistas no tienes suficiente, los ejercicios están todos resueltos en el capítulo de soluciones. No pasa nada si no logras resolver alguno. A todos nos pasa con los ejercicios de los libros. He tratado de explicar las soluciones de forma que sean también ilustrativas del modo de razonar que seguimos en matemáticas.

Espero que disfrutes tanto de los intentos de resolver los ejercicios como de las soluciones que alcances.

1. Pistas para los ejercicios

Capítulo 1: Las matemáticas son de listos

Ejercicio 1: No te puedo dar muchas pistas aquí, pero una cosa sí te digo: existe solución, de hecho, hay varios números menores de 100 que pueden ponerse como suma de dos cuadrados de dos formas diferentes. No te olvides que al poner un número como suma de dos cuadrados, éstos pueden ser iguales: por ejemplo, el 18 es 3^2+3^2. Por desgracia, no hay otra forma de poner el 18 como suma de dos cuadrados, así que no te vale como solución.

Capítulo 2: Somos matemáticos

Ejercicio 1: ¿Qué forma tiene un número par? Todo número par es 2 multiplicado por algo, llamemos m a ese «algo», un número cualquiera. Vale, pues multiplica $2m$ por $2m$ y verás como siempre es par. ¿Y qué forma tiene un número impar? Pues $2m$-1, ahora multiplícalo por sí mismo.

Ejercicio 2: Vamos a examinar los ejemplos más pequeños, aparte del 2 y del 3. El 4 no es de los que buscamos, porque 4^2-1 es 15, que no es divisible entre 8. El 5 sí, porque 5^2-1 es 24, que es divisible entre 8. El 6 no, el 7 sí, el 8 no, el 9 sí... ¿Te parece que usemos como conjetura que todos los números impares son del tipo que queremos? Para probar esta conjetura observa que los números impares mayores de 1 son de la forma $2m$-1, con m un número mayor que 2.

Si consigues probar esa conjetura (que es cierta) tendrás hecha la mitad del ejercicio. Te falta probar que los pares no son del tipo que queremos, ninguno de ellos. Pero eso es más fácil. ¿Te das cuenta de por qué?

Así pues, ser impar es una condición suficiente para ser del tipo que queremos (basta que n sea impar para que n^2-1 sea divisible por 8). Y además es una condición necesaria, porque si no es impar (o sea, si es par), no pertenece a ese tipo de números. Total, que hemos demostrado que n es impar si y sólo si n^2-1 es divisible entre 8. Toma ya.

Capítulo 3: Las matemáticas no son ciencia

Ejercicio 1: Para este ejercicio no hay muchas pistas que dar. Simplemente que uses con cuidado cada paso de inducción:

Primero demuéstralo para n=1 (es fácil).

Luego, supón que es cierto para n, es decir, supón que sabemos que 1+2+3+...+n es igual a $n\cdot(n+1)/2$ y trata de demostrarlo para 1+2+3+...+n+(n+1). O sea, que

1+2+3+...+n+(n+1) es igual a $(n+1)\cdot(n+2)/2$. Para ello sólo tienes que sumar (n+1) a $n\cdot(n+1)/2$ (que hemos supuesto que es igual a 1+2+3+...+n).

Ejercicio 2: Vamos a usar la abstracción. En lugar de n personas sentadas en una mesa vamos a pensar en una lista de letras. Cada persona será una letra, por ejemplo, A, B, C, D... Necesitamos el conjunto que describa todas las posibles formas de colocar a esas personas en la mesa, y para eso lo que hacemos es representar las formas de colocar o reordenar a las personas con una lista de números, un número por persona.

Supón que tenemos tres personas. La lista (1, 2, 3) significa que todas se quedan en su sitio. La lista (1, 3, 2) significa que el primer sitio lo sigue ocupando la persona que lo ocupaba, que el segundo sitio lo ocupa ahora la persona que ocupaba la posición 3, y que el tercer sitio lo ocupa ahora la persona que ocupaba la posición 2.

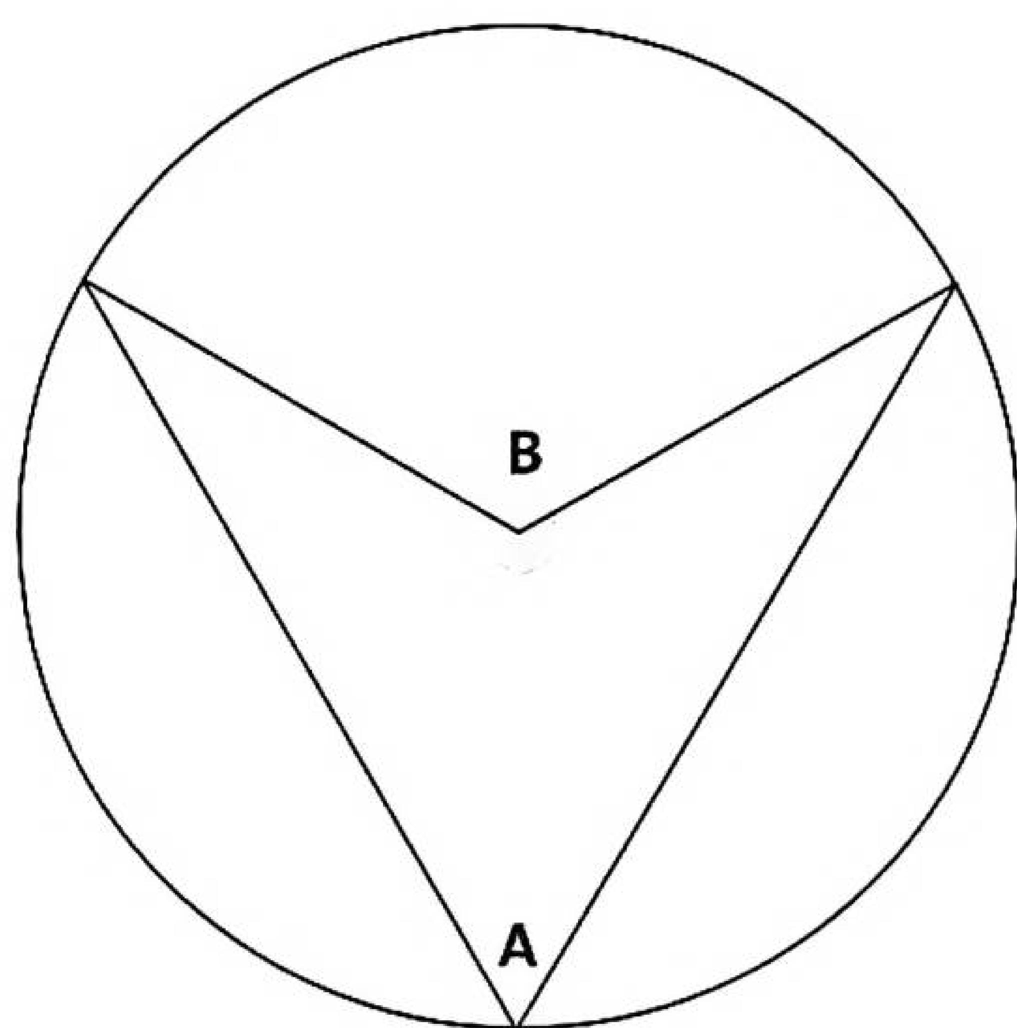
¿Cuál sería el elemento neutro? ¿Y el elemento inverso de uno dado? Para demostrar que no es abeliano basta encontrar dos cambios de sitio que hechos en distinto orden den dos resultados diferentes.

Capítulo 4: ¿Qué es un número?

Ejercicio 1: Como pista recuerda que en las cifras decimales de todo número racional llega un punto a partir del cual los números se repiten cíclicamente.

Capítulo 6: El problema de las diferentes inteligencias matemáticas

Ejercicio 1: Te presto un resultado que puede serte útil: cuando dos ángulos cubren la misma porción de la circunferencia (se dice que abarcan el mismo arco de circunferencia) si uno tiene su vértice sobre la circunferencia y el otro en el centro de ésta, entonces aquél mide la mitad que éste. En el dibujo, el ángulo A es la mitad que el B.



Ejercicio 2: Te doy dos pistas. La primera es que te fijes en el triángulo AOB (tendrás que añadir el lado OB), eso te puede ayudar a identificar el ángulo con vértice en P.

La segunda pista es que una condición suficiente para que dos triángulos sean semejantes es que tengan todos sus ángulos iguales.

Capítulo 7: Domar la intuición

Ejercicio 1: Este ejercicio es muy similar al problema del cumpleaños. La solución llega si calculamos las probabilidades por medio de aquello de los casos favorables entre casos posibles. Pero, cuidado, que como pasaba en el problema del cumpleaños, es más fácil calcular la probabilidad de que ninguno de los 3 temas del examen sea uno que te has estudiado que al revés. Así que calcula la probabilidad fácil y réstala de 1.

Capítulo 8: Problemas, problemas, problemas

Ejercicio 1: Hay muchas formas de probar que existen infinitas ternas pitagóricas, es decir, tríos x, y, z tales que $x^2+y^2=z^2$. Te recomiendo la siguiente: elige una terna pitagórica que conozcas y trata a partir de ella de generar una familia infinita de ternas también pitagóricas.

Ejercicio 2: Supón que sabes poner cualquier par mayor que 4 como suma de dos números primos. ¿Puedes a partir de ahí encontrar una forma de poner cualquier impar mayor de 5 como suma de tres primos?

Capítulo 9: ¡A jugar!

Ejercicio 1: Lo de los caballos parece imposible pero es fácil. Fíjate en los colores de las casillas.

Los reyes y las torres son fáciles de colocar, sólo pedimos una solución para cada pieza, no todas las posibles soluciones. Así que no te doy pistas, ensaya.

Ejercicio 2: Ensaya unas cuantas veces y ten algo en mente: simetría. Es muy importante para la estrategia ganadora de este juego. Seguro que algo se te ocurre.

Capítulo 10: De paseo con tu matemático interior

Ejercicio 1: Fíjate en lo que ocurre con los vértices del cubrimiento. ¿Cuántas piezas se juntan ahí? ¿Cómo determina eso los ángulos interiores que puede tener el polígono (que al ser regular serán todos iguales)?

Ejercicio 2: Calcula el perímetro de un triángulo, un cuadrado y un hexágono de área 1. ¿Cuál es menor?

Capítulo 11: ¿Cuál es el siguiente número?

Ejercicio 1: Intenta con una reducción al absurdo. Supongamos que efectivamente uno de los términos de la sucesión

tiene un 4 en algún lugar, ¿cómo es el número anterior? Si no encuentras fácilmente una contradicción, sigue «yendo hacia atrás».

2. Soluciones a los ejercicios

Capítulo 1: Las matemáticas son de listos

Ejercicio 1: Si te das cuenta, el 50 es 1^2+7^2 pero también 5^2+5^2. El 50 es el número más pequeño que tiene esta propiedad. El 65 se puede poner como 1^2+8^2 y como 4^2+7^2. También el 85 se puede poner como suma de dos cuadrados de dos formas diferentes (te dejo que las encuentres tú). Y aquí se acaban los menores de 100, ya ves que no hay muchos. Bueno, y si admites el cero, entonces añade el 25 a la lista, que es igual a 0^2+5^2 y también 3^2+4^2.

Capítulo 2: Somos matemáticos

Ejercicio 1: Si el número es par, es de la forma $2m$. Lo multiplicamos por sí mismo y nos da $4m^2$, o sea, 4 por algo (elevado al cuadrado). Pero si es 4 por algo ya es par.

Si el número es impar, es de la forma $2m$-1. Lo elevamos al cuadrado y da $4m^2$-$4m$+1. Si no sabes de dónde sale eso,

no te preocupes. Quizá lo estudiaste en el instituto y se te olvidó, o quizá nunca lo estudiaste. Pero te aseguro que es verdad. Bien, pues mira, $4m^2$ es un número par, y $4m$ es otro número par (más pequeño). Si a un número par le restas otro par, el resultado es par. Así que $4m^2$-$4m$ es par. Y si a un número par le sumas 1 da un impar. Y ya está.

Ejercicio 2: Vamos a demostrar que un número n^2-1 es divisible entre 8 si y sólo si n es impar. Cuidado, esto es una demostración que tiene cierta dificultad para quien no se ha enfrentado nunca a este tipo de cosas. No te agobies si no lo entiendes todo; no pasa nada.

Primero veremos la parte fácil, o sea, que si n es par, n^2-1 no puede ser divisible entre 8:

Si n es par entonces n^2 también lo es, porque multiplicar un número par por un número par da otro número par. Siempre. Lo has demostrado en el ejercicio anterior. Y si a un par le restamos 1, da un impar, que nunca podrá ser múltiplo de 8 (todos los múltiplos de 8 son pares).

Vale, ahora el caso difícil: ¿qué pasa si n es impar? Bien, si n es impar es de la forma $2m$-1, donde m es un número cualquiera, entonces n^2 será igual a $4m^2$-$4m$+1. Y entonces n^2-1 es igual a $4m^2$-$4m$. Si sacamos «factor común» a $4m$, nos queda que es $4m\cdot(m$-1). Y atento ahora, que viene una jugada maestra. Hemos quedado en que m es un número cualquiera, ¿no? No sabemos si es par o impar. Pero lo que es seguro es que si m es par entonces m-1 es impar y viceversa. ¡Ajá! Entonces de todas todas tengo a 4 multiplicado por

un par y por un impar, pero 4 por un par es un múltiplo de 8, o sea, que el total es múltiplo de 8. ¡Yeah!

Capítulo 3: Las matemáticas no son ciencia

Ejercicio 1: El caso $n=1$ es fácil: $1\cdot 2/2$ es igual a 1. Hecho, vamos a por lo difícil.

Supongamos que $1+2+3+\ldots+n$ es igual a $n\cdot(n+1)/2$, veamos si $1+2+3+..+n+(n+1)$ es igual a $(n+1)\cdot(n+2)/2$. Bien, tenemos que $1+2+3+..+n+(n+1)$ es igual a $n\cdot(n+1)/2+(n+1)$ y eso, sacando $(n+1)$ como factor común en la suma, es $(n+1)\cdot(1+n/2)$, o sea, $(n+1)\cdot(n+2)/2$, que es lo que queríamos demostrar. Así que, gracias a la inducción, tenemos una bonita fórmula para la suma de los primeros n números.

Ejercicio 2: Supongamos que tenemos n personas sentadas a nuestra mesa. Una forma de mover a las n personas en la mesa la representamos mediante una lista de los números 1 al n en el orden que sea. El primer número dirá dónde se va a mover la persona que está en el primer puesto, el segundo número dirá dónde se coloca la que está en el segundo puesto, y así hasta n. Si te parece, vamos a pensar en que tenemos 5 personas. Bastará para que veas el argumento, el caso general será igual pero con una «notación» más complicada. Sugiero que elijamos la forma $(1,2,3,4,5)$ como elemento neutro, es decir, que nadie se mueve de su puesto. Ahora, dada una reordenación de las personas de la mesa,

por ejemplo $(1,3,5,4,2)$, significa que las personas están colocadas así: la primera persona se queda igual, la segunda va al puesto 3, la tercera al puesto 5, la cuarta se queda en el puesto 4 y la quinta se mueve al puesto 2. Podemos calcular fácilmente el inverso de cada movimiento, para ello basta con hacer la lista que tiene en primer lugar la posición del 1, en el segundo la posición del 2, etc. Así, el inverso de $(1,3,5,4,2)$ será $(1,5,2,4,3)$, ¿te das cuenta? Es fácil ver, aunque un poco tedioso de escribir, que es una operación asociativa, y para ver que no es conmutativa, busquemos un contraejemplo: basta con cambiar las posiciones 1 y 3 y luego las 3 y 4, o bien cambiar las 3 y 4 y luego las 1 y 3, ¿el resultado es el mismo? No. En el primer caso la persona que empieza en el puesto 3 se mueve al 1 y en el segundo movimiento se queda en el 1. Y en el segundo caso esa misma persona se mueve al 4 en el primer movimiento y se queda en el 4 con el segundo movimiento. Así que el orden de los movimientos afecta al resultado final.

Capítulo 4: ¿Qué es un número?

Ejercicio 1: El número de Champernowne no es racional, de hecho, es lo que se llama un número trascendente. No te he hablado de eso en el capítulo porque ya tenías suficiente, te animo a que investigues sobre ello. Para ver que no es racional debemos ver que las cifras decimales del número de Champernowne nunca se repiten cíclicamente. Y eso en este

caso es verdad, porque siempre, en algún momento del número, va a aparecer una lista de repeticiones de cualquiera de las cifras entre el 0 y el 9 de un tamaño tal que no había aparecido antes en la expresión del número. Así que efectivamente, no es racional. Te diré además que hay muchísimos más números irracionales que racionales; hay que ver lo que son las cosas.

Capítulo 6: El problema de las diferentes inteligencias matemáticas

Ejercicio 1: El ángulo del triángulo que tiene el vértice donde se juntan el cuadrado y la circunferencia abarca todo un diámetro. Es lo mismo que abarca un ángulo llano (de 180 grados) con vértice en el centro de la circunferencia. Así que aquél es la mitad de éste, luego mide 90 grados, es recto. Y por tanto, el triángulo es rectángulo.

Ejercicio 2: El triángulo AOB es isósceles, porque los lados OA y OB son dos radios de la circunferencia. Así pues, la altura sobre el lado AB pasa por O, siendo por supuesto perpendicular a AB por P. Así que ya tenemos que el triángulo APO es rectángulo, igual que el triángulo ABC. Además, comparten el ángulo de vértice en A, luego ya tienen dos ángulos iguales. Y si tienen dos ángulos iguales, tienen los tres, luego son semejantes.

Capítulo 7: Domar la intuición

Ejercicio 1: Imagina que has estudiado n temas. Veamos qué pasa con el primer tema para el examen. Hay 25 posibles, pero hay 25-n que no te has estudiado, éstos son los casos favorables a la probabilidad que queremos calcular. Ahora llega el segundo tema, ya sólo hay 24 posibles, porque ha salido uno, y 24-n de ellos no te los has estudiado. Con el tercer tema quedan 23 posibles y 23-n favorables. Ahora queda multiplicar los números de casos favorables entre sí y dividirlos por el producto de los casos posibles entre sí. El resultado es $\frac{(25-n)\,(24-n)\,(25-n)}{25 \cdot 24 \cdot 23}$ en donde si sustituimos n por 13 nos da 0,09, que corresponde a un 9 %. O sea, que estudiándote sólo 13 temas (más o menos la mitad) tienes un 91 % de probabilidades de que te toque uno de los que te has estudiado.

Capítulo 8: Problemas, problemas, problemas

Ejercicio 1: Si a, b, c es una terna pitagórica, entonces también lo es cualquier múltiplo suyo, o sea, $m \cdot a$, $m \cdot b$, $m \cdot c$ para cualquier m. Ahí tienes tu familia infinita, partiendo de una cualquiera, por ejemplo, 3, 4 y 5.

Ejercicio 2: Si la conjetura de Goldbach es cierta, cualquier par mayor de 2 se puede poner como suma de dos primos. Y resulta que cualquier impar mayor de 5 se puede poner

como 3 más un par mayor de 2. Y 3 es primo, así que efectivamente, cualquier impar mayor de 5 podría ponerse como suma de tres primos.

Capítulo 9: ¡A jugar!

Ejercicio 1: Cuando un caballo se mueve la casilla de llegada es de color distinto a la de partida, así que coloca los 32 caballos en las 32 casillas del mismo color y listo.

Hay muchas soluciones para lo de los 16 reyes. Una bonita es ésta: divide el tablero en cuadraditos de 2x2 casillas. Hay 16 cuadraditos. Elige una de las 4 casillas del primer cuadrado, la que sea. Coloca un rey ahí, ahora haz lo mismo con los otros 15, colocando cada uno en su cuadradito en la casilla equivalente a la que colocaste al primer rey.

Lo de las torres es más fácil aún. Colócalas en diagonal, es lo más obvio. Pero seguro que eres capaz de encontrar más soluciones.

Ejercicio 2: La estrategia ganadora es la siguiente: el primer jugador elige quitar una o dos de las monedas. Si ha quitado una, tú quitarás también una, y si ha quitado dos, tú quitarás dos también. Pero no cualquiera. Hazlo de forma que el grupo de monedas restantes quede dividido en dos partes iguales separadas por los huecos que habéis dejado en el primer turno tu oponente y tú. A partir de ahora, lo que haga tu oponente en una de las partes del grupo de monedas hazlo exactamen-

te igual en la otra parte. Tienes la victoria asegurada. Además, dejándole empezar parece que le das ventaja, pero no.

Capítulo 10: De paseo con tu matemático interior

Ejercicio 1: Según cómo coloques las piezas puede haber vértices que caen sobre el lado de otra pieza o vértices que se unen a otros vértices. Si caen sobre un lado, la recta de ese lado es un ángulo de 180 grados, y los otros 180 grados se cubren con los ángulos de los vértices que inciden ahí. Y son todos iguales (por eso estamos con polígonos regulares), así que han de ser divisores de 180. Eso sólo pasa con el triángulo (60 grados) y con el cuadrado (90 grados). Si en el punto de unión son todo vértices, entonces el ángulo debería ser divisor de 360, con lo que al triángulo y al cuadrado podemos añadir el hexágono (120 grados); ningún otro ángulo interior de un polígono regular divide a 360, así que la lista está completa.

Ejercicio 2: La fórmula del área del triángulo es la base por la mitad de la altura. Como el triángulo es equilátero la base mide como el lado, llamémosle L. La altura la podemos hallar por el teorema de Pitágoras. Si haces las cuentas verás que el área sale $\frac{\sqrt{3}\,L^2}{2}$, y esto tiene que ser igual a 1. Haces las manipulaciones (que son sencillas) y te sale que el lado L mide exactamente $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$, así que el perímetro es $\frac{6}{\sqrt[4]{3}}$. El perímetro del cuadrado es fácil, vale 4 (que es menor que $\frac{6}{\sqrt[4]{3}}$,

como podrás comprobar). Finalmente, la fórmula del área del hexágono regular es el perímetro por la mitad del apotema. El perímetro es seis veces el lado, y el apotema lo podemos calcular usando el teorema de Pitágoras, como con el triángulo. Sale que el área es $\frac{3\sqrt{3}\,L^2}{2}$ y como eso es igual a 1, obtenemos que el lado es $\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt[4]{3}}$ y por tanto el perímetro es $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt[4]{3}}$, que es más pequeño que 4.

Capítulo 11: ¿Cuál es el siguiente número?

Ejercicio 1: La primera aparición de un 4 en esta sucesión quiere decir que el número anterior tiene cuatro unos juntos, o cuatros doses juntos o cuatro treses juntos. ¿Qué pasa con un número que tiene cuatro unos juntos?

La cosa es algo así: ...a1111b... con a y b distintos de uno. Ahora, si a ocupa un lugar impar en la sucesión quiere decir que la anterior tiene «a unos», luego «un uno» y luego «un b». Ya. Pero entonces hubiéramos escrito $(a+1)11b$. Así que eso no puede ser. Y si a está en un lugar par quiere decir que la sucesión tenía algún número de «aes» repetidos, los que sean, luego «un uno», luego «un uno» y luego b veces «lo que sea que venga después». Pero entonces hubiéramos escrito «dos unos», y quedaría ...a21b... Vamos, que no, que no puede haber cuatro unos seguidos. Y lo mismo pasa con los doses y con los treses.

Es alucinante pero no, nunca va a haber un 4 en ningún término de esta sucesión.

Bibliografía

Puede que te hayas quedado con ganas de más. Ojalá. Si es el caso, quiero compartir contigo algunos de mis libros favoritos de matemáticas. De divulgación de las matemáticas. Tengo otros libros favoritos pero son muy técnicos, los dejamos para más adelante. Léelos todos. Éstos y otros. Vas a disfrutar, vas a reconocerte pensando matemáticamente, y vas a adquirir una cultura matemática que te va a ayudar mucho a disfrutar de la vida.

Te dejo en buenas manos.

Podría haber listado cien libros aquí. Te dejo estos pocos para que luego tú vayas descubriendo otros. Hay muchos muy buenos por ahí. Éstos me gustaron mucho, todos, y espero que también te gusten a ti. Es una selección personal, obviamente, pero he puesto cuidado en que los seleccionados sean libros que podrían gustar a cualquiera. Que los aprovechéis, tú y tu matemático interior.

***El hombre que calculaba,* de Malba Tahan.**
Este libro es una delicia, una historia interesante y hermosa en la que un sabio errante hace uso de las matemáticas en las distintas aventuras que se le presentan.

La música de los números primos, **de Marcus du Sautoy.**
Marcus du Sautoy es un divulgador matemático maravilloso. En este libro te cuenta de forma magistral todo lo que debes saber sobre la historia y las matemáticas en torno a la hipótesis de Riemann. Es magnífico.

Simetría, **de Marcus du Sautoy.**
El concepto de simetría explicado desde el punto de vista geométrico, algebraico, histórico y cultural. Es una historia apasionante donde podrás asistir a uno de los mayores logros colectivos de la comunidad matemática.

Apología de un matemático, **de Godfrey Hardy.**
Godfrey Hardy fue uno de los matemáticos más brillantes del siglo xx. Un intelectual refinadísimo y peculiar que cuenta en este libro imprescindible su visión de las matemáticas como una disciplina creativa y artística.

Cartas a una joven matemática, **de Ian Stewart.**
En estas cartas, Stewart, un matemático y divulgador de primera línea, explica en forma de cartas en qué consiste la vida de los matemáticos. Nuestra relación con las matemáticas, la forma de estudiar y trabajar, qué significan para nosotros. Es un libro muy ameno y muy interesante.

El hombre anumérico, **de John Allen Paulos.**
Matemáticas para la vida cotidiana. ¿Qué consecuencias tiene el «anumerismo»? Paulos se hizo mundialmente conocido

con este libro, porque afrontaba por primera vez las consecuencias negativas de la ignorancia matemática. Es un libro muy entretenido y que da mucho que pensar.

Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas, **de Martin Gardner.**
Todo el mundo debería tener a mano un libro de Gardner. Éste es uno de ellos, pero cualquiera puede servirte. Son una colección de curiosidades, juegos, enigmas, retos y problemas explicados con una pasión y un ingenio que enamoran.

El enigma de Fermat, **de Simon Singh.**
Es un libro entretenidísimo y muy interesante sobre la historia de cómo llegó a demostrarse el último teorema de Fermat. Es una lectura que vas a disfrutar de principio a fin junto a tu matemático interior. Singh escribió además un libro sobre las matemáticas en *Los Simpson* que no deberías perderte.

El placer de la X, **de Steven Strogatz.**
Strogatz es un gran matemático. Es un investigador de primera, autor de libros de texto universitarios y de investigación. Es también un gran divulgador de las matemáticas. Las conoce muy bien y las explica muy bien. Éste es un libro sobre el placer de hacer matemáticas a todos los niveles.

Psicología de la invención en el campo matemático, **de Jacques Hadamard.**
Éste es un libro diferente. De la mano de uno de los más grandes matemáticos del siglo xx, podrás internarte en cómo

piensa un matemático profesional. Y en cómo reflexiona y analiza su proceso creador. Es un libro que trata de explicar el momento de creación de nuevas ideas. Resulta fascinante.

***Matemática... ¿estás ahí?*, de Adrián Paenza.**
El libro de Paenza, probablemente el mayor divulgador de la matemática en lengua española, es una introducción sencilla y muy inteligente a decenas de problemas matemáticos. Cuenta muchas cosas y las cuenta de una forma amable y apasionada. No puedes perderte este libro.

***El diablo de los números*, de Hans Magnus Enzensberger.**
Con la aparente candidez de un cuento infantil, Enzensberger te introduce en este magnífico libro en el mundo de los números. Parece inofensivo y trata las relaciones profundas entre los números, de una forma entretenida y brillante. Es de esos libros que lees con una continua sonrisa pintada en la cara.

***Cómo hablar, demostrar y resolver en matemáticas*, de Miguel de Guzmán.**
Éste es un libro que te ayudará a fortalecer a tu matemático interior y a entenderte mejor con él. Podrás desarrollar muchas de las cosas que hemos visto en la primera parte del libro. Está escrito por uno de los padres de la divulgación matemática en España, un hombre sabio muy querido entre los matemáticos.

Su opinión es importante.
En futuras ediciones, estaremos encantados
de recoger sus comentarios sobre este libro.

Por favor, háganoslos llegar a través de nuestra web:

www.plataformaeditorial.com

Para adquirir nuestros títulos, consulte con su librero habitual.

«I cannot live without books.»
«No puedo vivir sin libros.»
THOMAS JEFFERSON

Plataforma Editorial planta un árbol
por cada título publicado.

